

ht
SC
C
1726



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.
FACULTAD DE CIENCIAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

Estudio de dos problemas de difusión no lineal mediante soluciones autosemejantes

Raúl Ferreira de Pablo

R. B. C 67.800



Tesis doctoral dirigida por: D. Francisco Bernis Carro y
D. Juan Luis Vázquez Suárez.

Madrid, octubre de 1998.

A mi familia.



Índice General

Prefacio	iii
I Comportamiento cerca del tiempo de extinción para una ecuación de difusión rápida con absorción	1
1 Introducción	3
2 Sobre un problema de difusión rápida con absorción fuerte	11
3 Soluciones autosemejantes	17
3.1 Sobre un problema de valor inicial	19
3.2 El caso conservativo, $p = m$	26
3.3 Caso disipativo, $m < p$	28
3.3.1 Estudio de A^-	28
3.3.2 Estudio de A^+	28
3.3.3 Demostración del teorema A'	30
3.4 Caso reactivo, $p < m$	32
3.4.1 Estudio de A^+	32
3.4.2 Estudio de A^-	32
3.4.3 Demostración del teorema A'	34
4 Construcción de la función de Lyapunov	39
5 Comportamiento cerca del tiempo de extinción, caso $p = m$	43
5.1 Cambio de escala	43
5.2 Estimaciones	44
5.3 Función de Lyapunov	47
5.4 Paso al límite. Demostración del teorema B1	48
5.4.1 Identificación del límite	48

6	Comportamiento cerca del tiempo de extinción, caso $m < p$.	49
6.1	Estimaciones	50
6.2	Función de Lyapunov	51
6.3	Paso al límite. Demostración del teorema B2	52
7	Comportamiento cerca del punto de extinción, caso $p < m$	55
7.1	Estimaciones	56
7.2	Función de Lyapunov	56
7.3	Paso al límite. Demostración del teorema B3	57
7.3.1	Identificación del límite: un caso particular	58
7.4	Comportamiento de la interfase	59
A	El caso $p \geq 1$	63
	Bibliografía	67
II	Soluciones Fuente para la ecuación de los thin-films	71
1	Introducción	73
2	No existencia: caso $n \geq 3$	81
3	Sobre un problema de contorno	85
3.1	Sobre la singularidad del laplaciano en el origen	85
3.2	Reducción a un problema de contorno	91
3.3	Principio del máximo. Función de Green	93
4	El caso $0 < n < 3$	99
4.1	Existencia de soluciones	99
4.2	Unicidad de soluciones	104
4.3	Comportamiento cerca de la frontera libre	106
5	El caso crítico: $n = 3$	111
A	Soluciones menos regulares	119
	Bibliografía	121

Prefacio

En este trabajo se estudian dos problemas diferentes pero ligados por una idea común: las soluciones autosemejantes; de sobra es conocida la importancia de dichas soluciones en el estudio del comportamiento asintótico de soluciones de ecuaciones de difusión no lineal. Las dos ecuaciones tratadas están sujetas a una invariancia bajo rotaciones y bajo ciertos cambios de escala, lo cual nos sugiere introducir unas nuevas variables (variables autosemejantes) en las cuales el problema se reduce a estudiar estados estacionarios (que en las variables originales dan lugar a las llamadas soluciones autosemejantes) y al estudio de la convergencia a dichos estados estacionarios. Sin embargo, la diferencia entre los problemas tratados nos llevará a emplear técnicas muy distintas en su estudio. Por ello dividimos este trabajo en dos partes, cada una con una numeración, una introducción y una bibliografía independientes.

La primera parte del trabajo estará dedicada al estudio de una ecuación de difusión rápida con absorción fuerte, la cual presenta el fenómeno de extinción en tiempo finito. Construiremos soluciones autosemejantes y demostraremos que dichas soluciones dan el comportamiento de las soluciones generales para tiempos cercanos al tiempo de extinción. La mayor dificultad con que nos encontraremos será la construcción de un funcional de Lyapunov; dicho funcional nos permitirá obtener estimaciones que son fundamentales para nuestro trabajo.

En la segunda parte construiremos soluciones fuente (con dato inicial una delta de Dirac) para la ecuación de los *thin-films* (o de las películas delgadas) en dimensión $d \geq 2$. Estudiaremos el rango de existencia y unicidad ($0 < n < 3$) de dichas soluciones y obtendremos su comportamiento asintótico en la interfase o frontera libre. Dichas soluciones fuente tendrán una forma autosemejante y darán, en dimensiones $d = 1, 2, 3$, el comportamiento asintótico de las soluciones para tiempos grandes. En este caso, los problemas que se nos plantean son problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La numeración de los resultados, capítulos y formulas es, como hemos dicho antes, totalmente independiente. Dentro de cada parte la numeración de las formulas vendrá dada por el número de capítulo, el numero de sección y su número de orden dentro de la sección; así, (4.1.10) hace referencia a la formula 10 de la sección 1 del capítulo 4. En todo el trabajo las constantes “no importantes” se denotarán por C , pudiendo, en cada caso, haber variado su valor, pero siempre serán positivas. Los teoremas, lemas, corolarios,... se numeran de igual forma, con excepción de los resultados principales de cada parte, que denotaremos como teorema A, teorema B, etc.

Por último, en estas líneas me gustaría mostrar mi agradecimiento a todas aquellas personas que me han apoyado durante estos años; sin vosotros esto hubiera sido mucho menos divertido.

En primer lugar a Juan Luis y a Paco, mis maestros, quienes en todo momento me han dedicado de forma generosa su tiempo y sabiduría, tanto en el aspecto científico como en el personal.

A Juan Ramón, por su esfuerzo en la lectura y comentarios sobre esta memoria.

A Ana y Alicia (A^2), mis “inseparables” compañeras de despacho, con las que he tenido la suerte de arreglar el mundo una infinidad de veces.

A mis otros compañeros de despacho, Chema, Dani, Enrique y Pablo, los cuales han aguantado estoicamente mis apariciones (o invasiones) por “mi otro despacho”.

A Lola, Fernando, Omar y Guillermo, siempre dispuestos a escuchar y discutir todas las dudas sobre los problemas que aparecen en este trabajo.

A Sonia, por animarme en todo momento y por estar siempre ahí.

A toda la gente del departamento, en especial a Sonsoles y ese café tan rico que hace. He disfrutado mucho estos años intentando probar teoremas y dando mis clases, pero también de tantos buenos desayunos, de no menos juergas y de discusiones tan absurdas como agradables.

Parte I

Comportamiento cerca del tiempo de extinción para una ecuación de difusión rápida con absorción

Capítulo 1

Introducción

En esta parte de la memoria estudiaremos la ecuación del calor no lineal

$$u_t = (u^m)_{xx} - u^p,$$

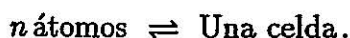
donde $u(x, t)$ es una función escalar definida para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ y los parámetros m y p verifican $0 < m, p < 1$. Esta ecuación describe un modelo de difusión rápida con absorción no lineal y constituye un ejemplo de ecuación de evolución no lineal de tipo parabólico. Escrita en forma más general, aparece como

$$u_t = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) - c(u)u,$$

para $k(u)$ y $c(u)$ funciones cualesquiera.

La referencia clásica a este tipo de ecuaciones corresponde a tomar $k(u) \equiv 1$ y $c(u) \equiv 0$, es decir, la ecuación del calor, $u_t = \Delta u$, que se utiliza para describir procesos de transmisión de calor y difusión de sustancias.

Son numerosas las situaciones físicas donde aparece de forma natural el modelo de difusión no lineal. Analicemos una de ellas dada por King en 1988, ver [Ki], que corresponde al caso $c(u) \equiv 0$ y describe la difusión de impurezas en silicio. En el modelo supondremos que las impurezas se presentan en dos estados, como átomos móviles (con concentración c) y como celdas inmóviles (con concentración c'), cada una de las cuales contiene n átomos. La reacción entre los dos tipos de impurezas vendrá dada por



En este modelo supondremos que dicha reacción alcanza un equilibrio, es decir

$$c' = K \cdot c^n,$$

con K constante. Y que la redistribución de átomos móviles se rige por una difusión lineal con constante de difusión D , es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}(c + c') = D\Delta c.$$

Ahora bien, si suponemos que la concentración de las celdas inmóviles es mucho mayor que la de los átomos móviles, $c' \gg c$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\frac{\partial}{\partial t}c' = \frac{D}{K^{1/n}}\Delta(c')^{1/n}.$$

Mediante un cambio de escala se puede reemplazar la constante $\frac{D}{K^{1/n}}$ por 1, obteniendo así la ecuación de difusión rápida

$$u_t = \Delta u^m.$$

Esta ecuación aparece en otras muchas situaciones; la más frecuente se refiere a la propagación del calor. Cuando $c(u) = u^{p-1}$ se llega a la ecuación

$$u_t = \Delta u^m - u^p$$

para describir procesos de propagación térmica con absorción, ver [Ka2, SGK]. Entonces u representa la temperatura, $(u^m)_{xx}$ la difusión y el término $-u^p$ representa la absorción de calor por el medio.

En el caso en que las funciones $k(u) = mu^{m-1}$ y $c(u) = u^{p-1}$ dependan de forma potencial de la solución $u(x, t)$, aparecen distintas propiedades en función de los parámetros m y p .

En el caso de difusión rápida o difusión lineal, si el efecto de la absorción no es muy fuerte, $p \geq 1$, nos encontramos con una propiedad de *positividad* semejante a la de la ecuación del calor.

Para el caso de difusión lenta, correspondiente a $m > 1$, nos encontramos con una propiedad común para todos los grados de absorción, la propiedad de *velocidad de propagación finita*, es decir, si la solución $u(x, t)$ se anula inicialmente fuera de una región acotada, también se anula fuera de una región acotada para cualquier tiempo posterior.

Este hecho contrasta fuertemente con lo que ocurre con la ecuación del calor, donde se tiene una propiedad de velocidad de propagación infinita. Según esto, vemos que la propiedad de positividad característica de la ecuación del

calor se pierde si $m > 1$, apareciendo distintas propiedades en función de la relación entre m y p .

Para el grado de absorción correspondiente al rango de parámetros $p \geq m > 1$, nos encontramos con *cierta propiedad de positividad* aunque más débil que en caso de la ecuación del calor, y que establece que la solución $u(x, t)$ llegará a cubrir todo el espacio. Más concretamente,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists T(x) < \infty \text{ tal que } \forall t \geq T(x), u(x, t) > 0.$$

Por otro lado, si fijamos el rango de parámetros $1 < p < m$, el efecto de la absorción, con más influencia que antes, se hace notar provocando un fenómeno de *localización*: para todo tiempo $t > 0$, la solución $u(x, t)$ quedará confinada en una región del espacio. Más concretamente

$$\exists R > 0 \text{ tal que } \forall t > 0, u(x, t) \equiv 0 \text{ si } |x| > R.$$

Independientemente de que la difusión sea rápida, lenta o lineal, si acentuamos aún más el efecto de la absorción, $p < 1$, aparecen fenómenos de *extinción* y la solución $u(x, t)$ se anula en tiempo finito. Más concretamente, existe un tiempo $T > 0$ tal que

$$u(x, t) \neq 0 \text{ para } 0 < t < T, \text{ pero } u(x, t) \equiv 0 \text{ } \forall t > T.$$

Los problemas de existencia y unicidad de soluciones para la ecuación del calor no lineal con absorción han sido muy estudiados para diferentes rangos de los exponentes m y p . Citaremos, sin ánimo de completitud, los trabajos de Kersner [Ke], Bertsch [Ber] y Kalashnikov [Ka2] para el caso $m \geq 1$ y el trabajo de Borelli y Ughi [BU] para el caso $m < 1$.

En cuanto al comportamiento asintótico de las soluciones en el caso de difusión lenta o lineal ($m \geq 1$) se presentan varios casos dependiendo de la relación entre p y m . Como referencias globales citaremos los trabajos de Galaktionov *et al.* [SGKM] y el trabajo de Vázquez [V].

En el caso en que $p > m + 2$ la absorción es mucho más débil que la difusión y obtenemos un fenómeno de *simplificación asintótica*; la solución se comporta como una solución de la ecuación de difusión pura. Ver [GaVe, KU]

Cuando $m < p < m + 2$, existe una única solución muy singular (en inglés, *Very Singular Solution*), ver [BPT, KV], la cual da el comportamiento asintótico de la solución, *cf.* [KP].

En el caso $1 < p < m$ obtenemos que la solución evoluciona hacia un perfil en forma de “mesa”. Es decir, existe un conjunto acotado tal que la solución se comporta como la solución plana, cf. [BNP] (se puede ver como una simplificación asintótica hacia la ecuación de absorción pura); por otro lado existe una solución autosemejante que da el comportamiento en el borde de la mesa, cf. [ChV].

Si $p \leq 1$ aparecen fenómenos de extinción en tiempo finito, ver [HVe, GV2, GV3, GSV1, GSV2].

Existen tres casos límite, $p = 1$, $p = m$ y $p = m + 2$. En el caso $p = m + 2$ obtenemos que la solución se comporta como una solución de la ecuación de difusión pura sujeta a una contracción en u y en x , ver [GV1]. El caso $p = m$, se espera un comportamiento a un perfil en forma de “mesa”, cf. [BNP, ChVW], la cual se hace infinitamente grande. El caso $p = 1$ se transforma mediante un simple cambio de escala en el tiempo en la ecuación de difusión pura.

Nosotros estamos interesados en el caso de difusión rápida, $m < 1$, que ha sido tratado para $p \geq 1$ en [PJ1, PJ2, Le]. Desde el punto de vista del comportamiento asintótico, no presenta cambios con respecto al caso $m \geq 1$; este estudio lo veremos más adelante.

Así pues, en esta parte de la memoria, completaremos, en el caso unidimensional, el cuadrante $m, p > 0$, con el estudio de la ecuación de difusión rápida, $0 < m < 1$, con absorción fuerte, $0 < p < 1$. Más concretamente, trataremos el problema de Cauchy

$$(1.0.1) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} - u^p & \text{en } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Exigiremos al dato inicial $u_0(x)$ que sea continuo, no negativo, simétrico, decreciente para $x > 0$ y con soporte compacto. Estas condiciones no son óptimas y podrán ser mejoradas dependiendo de la relación entre m y p .

Como comentamos anteriormente, por ser $p < 1$ este problema presenta la propiedad de *extinción* en tiempo finito. Denotaremos por T al tiempo de extinción y por E al conjunto de extinción, definido como

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \text{existen sucesiones } x_n \rightarrow x, t_n \rightarrow T \text{ tales que } u(x_n, t_n) > 0\}.$$

Diversas propiedades de la ecuación (1.0.1) con respecto a los parámetros m y p nos obligarán a estudiar tres casos:

- $0 < m < p < 1$, en el que se verifica la propiedad de *positividad* (semejante a la ecuación del calor); por tanto $E = \mathbf{R}$,
- $0 < p < m < 1$, en el que tenemos las propiedades de *velocidad de propagación finita y localización*, cf. [Be]; además, $E = \{0\}$,
- $0 < m = p < 1$, como caso crítico entre ambos.

La existencia y unicidad ha sido estudiada por Borelli y Ughi en [BU], por lo que centraremos nuestro estudio en el comportamiento cerca del tiempo de extinción.

Para dicho estudio, precisaremos una serie de estimaciones *a priori*. Debido a esto, dedicaremos el capítulo 2 a conseguirlas.

Por otra parte, es conocido en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales no lineales de tipo parabólico, que muchas propiedades de la ecuación se deducen por la existencia de un tipo apropiado de soluciones autosemejantes, [Bar2]. Por lo que dedicaremos el capítulo 3 a la construcción de dichas soluciones, ya que como veremos darán el comportamiento cerca del tiempo de extinción.

En el caso de extinción en tiempo finito, las soluciones autosemejantes tienen la forma

$$(1.0.2) \quad U(x, t) = (T - t)^\alpha F(x(T - t)^\beta).$$

Una muestra de la importancia de estas soluciones es que podemos probar la propiedad de extinción en tiempo finito, mediante comparación con la familia de soluciones autosemejantes

$$(1.0.3) \quad U_T(x, t) = [(1 - p)(T - t)_+]^{1/(1-p)}, \quad T > 0.$$

A esta familia de soluciones la llamaremos *soluciones planas*.

Los valores de los exponentes de autosemejanza α y β se obtienen automáticamente del hecho de que la función $U(x, t)$ es una solución de (1.0.1) y vienen dados por

$$\alpha = \frac{1}{1 - p} \quad \beta = \frac{p - m}{2(m - p)}.$$

Por otro lado el perfil de autosemejanza $F = F(\xi)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$(F^m)'' + \beta \xi F' + \alpha F - F^p = 0,$$

donde la nueva variable ξ viene dada por

$$\xi = x(T - t)^\beta.$$

Puede notarse que la ecuación de los perfiles admite como solución la constante

$$a_* = \alpha^{-\alpha} = (1 - p)^{1/(1-p)},$$

que corresponde al perfil de la solución plana (1.0.3).

Teorema A *Existe un perfil autosemejante simétrico, no negativo, decreciente para $\xi > 0$ y que satisface*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} F(\xi) = 0.$$

Además, en el caso $p = m$ este perfil es único, cuando $p < m$ tiene soporte compacto y para $p \geq m$ es estrictamente positivo.

En los capítulos 5, 6 y 7 demostraremos que el comportamiento de las soluciones de la ecuación (1.0.1) cerca del tiempo de extinción viene dado por el tipo de soluciones autosemejantes dadas en el teorema A.

Para el estudio del comportamiento de soluciones cerca del tiempo de extinción, será conveniente introducir ciertas variables reescaladas

$$\xi = x(T - t)^\beta \quad \text{y} \quad \tau = -\log \left(1 - \frac{t}{T} \right).$$

En las nuevas variables, la función reescalada

$$f(\xi, \tau) = (T - t)^{-\alpha} u(\xi(T - t)^{-\beta}, t)$$

verifica la ecuación

$$(1.0.4) \quad f_\tau = (f^m)_{\xi\xi} + \beta\xi f_\xi + \alpha f - f^p,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$, con dato inicial

$$(1.0.5) \quad f(\xi, 0) = f_0(\xi) = T^{-\alpha} u_0(\xi T^{-\beta}).$$

Como el nuevo tiempo τ tiende a infinito cuando t tiende a T , el estudio del comportamiento cerca del tiempo de extinción queda sustituido, en las nuevas variables, por el estudio del comportamiento asintótico del problema (1.0.4)-(1.0.5).

Un punto importante en este estudio, es la construcción de una función de Lyapunov apropiada, que nos permitirá obtener estimaciones de la función f y nos ayudará a identificar su límite cuando $\tau \rightarrow \infty$. En el capítulo 4 construiremos una función de Lyapunov para un problema más general.

El hecho de sólo haber demostrado unicidad en el teorema A para el caso $p = m$, nos plantea un problema a la hora de identificar el límite de la órbita $\{f(\xi, \tau) : \tau > \tau_0\}$. Por lo que introduciremos el conjunto ω -límite de una solución del problema (1.0.4)-(1.0.5). Dicho conjunto se define como

$$\omega(f_0) = \{g(\xi) \geq 0, g \in C(\mathbb{R}) : \exists \tau_j \text{ tal que, cuando } \tau_j \rightarrow \infty,$$

$$f(\cdot, \tau_j) \rightarrow g(\cdot) \text{ uniformemente sobre compactos de } \mathbb{R}\}$$

Una vez introducido el concepto de ω -límite, estamos en disposición de presentar el segundo resultado importante de esta parte de la memoria.

Teorema B *Supongamos que la función $f_0(\xi)$ satisface las siguientes propiedades: es una función continua, no negativa, simétrica, decreciente para $\xi > 0$ y con soporte compacto. Sea $f(\xi, \tau)$ la solución del problema (1.0.4)-(1.0.5). Entonces su conjunto ω -límite está formado por los perfiles autosemejantes construidos en el teorema A. Más concretamente,*

$$\omega(f_0) \subset \left\{ F(\xi) : \begin{array}{l} F \text{ es un perfil autosemejante simétrico,} \\ \text{no negativo y decreciente para } \xi > 0 \end{array} \right\}.$$

Nota. Debido a las distintas propiedades de la ecuación (1.0.4) en función de los parámetros m y p , las condiciones pedidas en el teorema B al dato inicial $f_0(\xi)$ no son óptimas. De hecho el teorema es cierto para una clase mayor de datos iniciales.

Por último, me gustaría hacer mención al problema de *blow-up*

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^p & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

donde los parámetros m y p son mayores que 1. En principio es un problema diferente, pero que guarda una cierta "simetría" con el nuestro.

Existen soluciones autosemejantes que satisfacen las condiciones del teorema A. En este caso, tienen la forma

$$\tilde{U} = (T - t)^{-|\alpha|} \tilde{F}(x(T - t)^\beta).$$

Dichas soluciones tienen soporte compacto en el caso en que $p \geq m$ y tienen soporte no compacto para $p < m$. Justo lo contrario de lo que ocurre en el problema de extinción (de ahí que hayamos hablado de "simetría").

Además, tanto las técnicas desarrolladas para la construcción de las soluciones autosemejantes como las utilizadas para el estudio del comportamiento de las soluciones cerca del tiempo de explosión, son muy parejas a las empleadas en esta parte de la memoria.

Citemos para este tipo de problemas de *blow-up* los trabajos de Galaktionov [Ga1, Ga2, Ga3], destacando [SGKM] como referencia imprescindible.

Capítulo 2

Sobre un problema de difusión rápida con absorción fuerte

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades sobre el problema de Cauchy

$$(2.0.1) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} - u^p & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

con parámetros $0 < m, p < 1$.

Lo primero de todo es dar un concepto de solución: diremos que una función $u(x, t)$ continua y no negativa es una solución generalizada si para todo $0 < t_0 < t_1$ y $x_0 < x_1$ se verifica

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (u^m \varphi_{xx} - u \varphi_t - u^p \varphi) dx dt - \int_{x_0}^{x_1} u \varphi dx \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} u^m \varphi_x dt \Big|_{x_0}^{x_1} = 0,$$

donde $\varphi(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(Q_T)$ es una función arbitraria que se anula para $x = x_0$ y $x = x_1$.

Estudios sobre la existencia, unicidad y propiedades de soluciones generalizadas han sido tratadas por Borelli y Ughi en [BU].

Por otra parte, el hecho de que los coeficientes de difusión y absorción sean singulares en los puntos donde la solución se anula, provoca dos tipos de comportamiento, dependiendo de cuál de los dos coeficientes “explote más rápidamente”. Más concretamente:

Lema 2.0.1 Si $0 < m \leq p$, la solución del problema (2.0.1) es positiva en el dominio $Q_T = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}$. Por otro lado, si $p < m$, se verifica la propiedad de velocidad de propagación finita.

Demostración. Para el caso crítico, $p = m$, tenemos la estimación *a priori*

$$u_t \leq \frac{u}{(1-m)t},$$

que se deduce gracias a un argumento de homogeneidad estudiado por Bénilan y Crandall [BC]. Ahora bien, si realizamos el cambio, a tiempo fijo $t > 0$, $g(x) = u^m(x, t)$, tenemos que la función $g(x)$ verifica la siguiente desigualdad

$$g'' \leq g + \frac{g^{1/m}}{(1-m)t}.$$

Como $m < 1$, el segundo miembro de la desigualdad es una función Lipschitz-continua de g y podemos aplicar el principio del máximo, cf. [Fr], para concluir que la función $g(x)$ no se anula en ningún punto, salvo que sea idénticamente cero.

Para el caso $p > m$, tenemos que la solución de

$$(2.0.2) \quad v_t = (v^m)_{xx} - \lambda v^m,$$

con $\lambda > 0$ suficientemente grande, es una subsolución del problema (2.0.1). Entonces, por comparación obtenemos que $u(x, t)$ no se anula, a no ser que $u(\cdot, t) \equiv 0$.

Por otro lado, para el caso $p < m$, en [HV] Herrero y Vázquez probaron la existencia de *travelling waves* con soporte compacto. De donde se puede deducir, por comparación, que se verifica la propiedad de velocidad de propagación finita. Esta propiedad también ha sido probada por Bernis en [Be], donde también se demuestra que en este rango de parámetros se verifica la propiedad de localización. \square

De hecho, en el caso en que $0 < p < m$, ocurre un fenómeno de *compactificación instantánea del soporte*. Más concretamente, se verifica el siguiente resultado:

Lema 2.0.2 Si el dato inicial $u_0(x)$ es continuo, no negativo y

$$u_0(x) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow \infty,$$

entonces, el soporte de $u(\cdot, t)$ es acotado para todo $t > 0$, incluso si en tiempo cero no lo es.

Este resultado ha sido probado por Borelli y Ughi en [BU], para el rango de parámetros $0 < p < m < 1$. En el caso de difusión lenta o lineal ($m \geq 1$) Evans y Knerr en [EK] prueban el mismo fenómeno para el caso $0 < p < 1$.

Una consecuencia inmediata del lema 2.0.1 es:

Corolario 2.0.3 *En el caso $p \geq m$ el conjunto de extinción E es toda la recta.*

En el resto del capítulo nos vamos a dedicar a obtener estimaciones *a priori* para la ecuación (2.0.1).

Lema 2.0.4 *Si para algún $r > 0$ la función $u_0(x)$ satisface*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|s-x| \leq r} |u_0(s)| ds < \infty,$$

entonces, para cada tiempo t , $u(\cdot, t)$ es acotada en \mathbb{R} .

Demostración. Tenemos que la ecuación sin absorción

$$u_t = (u^m)_{xx}$$

satisface el resultado, ver [HP]. Además, las soluciones del problema sin absorción son supersoluciones para el problema con absorción. Por tanto, por comparación, obtenemos el resultado deseado. \square

Lema 2.0.5 *Existe una constante $a_* = (1-p)^{1/(1-p)}$ tal que*

$$\|u(x, t)\|_{\infty} \geq a_*(T-t)^{\alpha}.$$

Demostración. Supongamos que existe un tiempo t_0 tal que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} u(\cdot, t_0) < a_*(T-t_0)^{\alpha},$$

y sea M dicho máximo. Definimos una constante T' de tal manera que se verifica que

$$M = a_*(T' - t_0)^{\alpha}.$$

En resumen, a tiempo t_0 , tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$u(x, t_0) \leq a_*(T' - t_0)^{\alpha} < a_*(T - t_0)^{\alpha}.$$

Por tanto, aplicando el principio de comparación, tenemos que

$$u(x, t) \leq a_*(T' - t)^{\alpha} < a_*(T - t)^{\alpha} \quad \text{para todo } t \geq t_0,$$

de donde se deduce que $u(x, t)$ se extingue en tiempo $T'' \leq T' < T$, lo cual contradice el hecho de que T sea el tiempo de extinción de $u(x, t)$. \square

Lema 2.0.6 Para toda solución acotada del problema (2.0.1) definida en el dominio $\mathbb{R} \times (0, T)$, tenemos que

$$|(u^m)_x| \leq \lambda \frac{u^{(p+m)/2}}{\sqrt{t}},$$

donde la constante $\lambda > 0$ depende de m, p, T y $\|u_0\|_\infty$.

Demostración. Consideremos dos funciones $h(x, t)$ y $k(u, t) > 0$ que satisfacen la identidad

$$hk = (u^m)_x.$$

Vamos a estudiar la ecuación que satisface la función $h(x, t)$. Si derivamos la igualdad anterior con respecto a x y con respecto a t obtenemos que

$$h_x k + h k_u u_x = m(m-1)u^{m-2}(u_x)^2 + m u^{m-1} u_{xx},$$

$$h_t k + h(k_u u_t + k_t) = m(m-1)u^{m-2} u_x u_t + m u^{m-1} u_{xt}.$$

Además, escribiendo la ecuación (2.0.1) en términos de p y k ,

$$u_t = h_x k + h k_u u_x - u^p,$$

y derivándola con respecto a x , tenemos que

$$u_{tx} = h_{xx} k + 2h_x k_u u_x + h k_{uu} (u_x)^2 + h k_u u_{xx} - p u^{p-1}.$$

Por último, por como hemos definido h y k ,

$$u_x = \frac{hk}{m u^{m-1}}.$$

Juntándolo todo, vemos que la función $h(x, t)$ satisface una ecuación de la forma

$$h_t k = \mathcal{L}(h)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h) &= m u^{m-1} k h_{xx} + k h h_x (2k_u - (1-m)\frac{k}{u}) \\ &\quad + (k_{uu} k^2 / m u^{m-1}) h^3 + ((1-m-p)u^{p-1} k + u^p k_u - k_t) h. \end{aligned}$$

Definimos la función $k(x, t)$ como

$$k(u, t) = \frac{\lambda u^{(p+m)/2}}{\sqrt{t}};$$

por tanto la función h viene dada por

$$h(x, t) = \begin{cases} \frac{2m}{(m-p)\lambda} (u^{(m-p)/2})_x \sqrt{t} & \text{para } p \neq m, \\ \frac{m}{\lambda} (\log u)_x \sqrt{t} & \text{para } p = m. \end{cases}$$

Como las funciones $k(u, t)$ y $u(x, t)$ son positivas, la ecuación que satisface h es parabólica. Ahora bien, la función constante $z(x, t) \equiv 1$ es una supersolución

$$\mathcal{L}(1) = \frac{\lambda u^{(3p+m)/2}}{mt\sqrt{t}} \left(-\frac{(p+m)(2-p-m)}{4} \lambda^2 + (1-m-p)mt + \frac{m}{2} u^{1-p} \right)$$

y como $u(x, t)$ es acotada para todo $t \geq t_0 > 0$, podemos elegir λ de forma que

$$\lambda^2 \geq \left(\frac{m}{2} C^{1-p} + mT(1-m-p) \right) \frac{4}{(p+m)(2-p-m)}.$$

Por otro lado, podemos elegir t_0 suficientemente pequeño como para que la función h satisfaga

$$h(x, t_0) < 1.$$

Entonces, aplicando el principio del máximo concluimos que la función

$$h(x, t) \leq 1 \text{ en } \mathbb{R} \times [t_0, T].$$

El hecho de que $h(x, 1) \geq -1$ viene dado inmediatamente por simetría.

Por como hemos definido las funciones h y k y la estimación conseguida para h , el teorema queda probado. \square

Nota. Este tipo de estimaciones para ecuaciones de difusión-absorción que tienen la forma (2.0.1) fueron dadas por Kalashnikov, cf. [Kal] en donde se considera el caso $m > 1$. En esta última prueba hemos seguido un método dado por Bénilan, cf. [Ben]. Con las soluciones autosemejantes, que construiremos más adelante, se puede comprobar que los exponentes obtenidos son óptimos.

Capítulo 3

Soluciones autosemejantes

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de soluciones simétricas de tipo autosemejante,

$$(3.0.1) \quad U(x, t) = (T - t)^\alpha F(x(T - t)^\beta).$$

Al imponer que $U(x, t)$ sea una solución obtenemos que los exponentes de autosemejanza α y β vienen dados por

$$\alpha = \frac{1}{1-p}, \quad \beta = \frac{p-m}{2(1-p)}$$

y que el perfil F debe satisfacer la ecuación

$$(F^m)'' + \beta \xi F' + \alpha F - F^p = 0,$$

donde la nueva variable independiente es $\xi = x(T - t)^\beta$. En el resto del capítulo trabajaremos, no con la función F , sino con la función $g = F^m$. Escribiendo la ecuación de los perfiles en términos de g obtenemos

$$(3.0.2) \quad g'' + \beta \xi (g^{\frac{1}{m}})' + \alpha g^{\frac{1}{m}} - g^{\frac{p}{m}} = 0.$$

De la hipótesis de simetría obtenemos que la derivada de la función g se anula en el origen. Por tanto, si dejamos como parámetro libre la altura de g en el origen, podremos plantear un problema de valores iniciales para la ecuación (3.0.2).

Todo este capítulo lo dedicaremos al estudio, dependiendo del parámetro libre g_0 , del problema de valores iniciales

$$(3.0.3) \quad \begin{cases} g'' + \beta \xi (g^{\frac{1}{m}})' + \alpha g^{\frac{1}{m}} - g^{\frac{p}{m}} = 0 & \text{en } \xi > 0 \\ g(0) = g_0 \\ g'(0) = 0 \end{cases}$$

con el fin de demostrar el siguiente teorema, que traducido a la función F , es equivalente al teorema A.

Teorema A' *Existe una solución no negativa del problema (3.0.3) que satisface*

$$g' \leq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} g(\xi) = 0.$$

Además, si $p = m$ esta solución es única, en el rango $p < m$ dicha solución tiene soporte compacto y es estrictamente positiva en el caso $p > m$.

Obsérvese que el problema (3.0.3) admite dos soluciones constantes, la trivial $g = 0$ y la constante

$$c_* = a_*^m = (1 - p)^{m/(1-p)},$$

correspondiente a la solución plana (1.0.3).

Para demostrar este teorema usaremos un método de disparo, con parámetro $g_0 > 0$. Definimos los conjuntos:

$$A^+ = \{g_0 : \text{la solución } g \text{ es monótona decreciente en } (0, \xi_0) \\ \text{con } g(\xi_0) = 0 \text{ y } g'(\xi_0) \neq 0\}.$$

$$A^- = \{g_0 : \text{la función } g(\xi) \text{ tiene un punto de mínimo positivo}\} \cup \{c_*\}.$$

$$A = \{g_0 : \text{la solución } g \text{ es no negativa y monótona decreciente}\}.$$

Estos conjuntos son disjuntos y su unión es todo \mathbb{R}^+ . Entonces, si demostramos que tanto A^+ como A^- son conjuntos abiertos y no vacíos, obtendremos, por ser la semirecta $(0, \infty)$ conexa, que el conjunto A es un cerrado no vacío.

El hecho de que el signo del parámetro β varíe dependiendo de los parámetros m y p nos obliga a estudiar tres casos distintos:

- El caso conservativo, que corresponde a $\beta = 0$.
- El caso disipativo, que corresponde a $\beta > 0$.
- El caso reactivo, que corresponde a $\beta < 0$.

Llamamos así a los distintos casos debido a que si multiplicamos la ecuación (3.0.2) por g' e integramos entre ξ_1 y ξ_2 , obtenemos la ecuación de energía

$$(3.0.4) \quad E_g(\xi_2) = E_g(\xi_1) - \frac{\beta}{m} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi g^{\frac{1}{m}-1} (g')^2 d\xi,$$

en donde la energía viene definida por

$$(3.0.5) \quad E_g = \frac{(g')^2}{2} + V(g), \quad V(g) = \alpha \frac{m}{m+1} g^{\frac{m+1}{m}} - \frac{m}{m+p} g^{\frac{m+p}{m}}.$$

Nótese que la función $V(s)$ es negativa en el intervalo $0 < s < c'$ y positiva para $s > c'$, con la constante $c' = c'(m, p) > c_*$. Y que V alcanza el mínimo, V_{min} , para $s = c_*$.

3.1 Sobre un problema de valor inicial

En esta sección estudiaremos las propiedades de unicidad y dependencia continua de las soluciones con respecto a las datos iniciales para la ecuación

$$(3.1.1) \quad g'' + \beta \xi (|g|^{(1-m)/m} g)' + \alpha |g|^{(1-m)/m} g - |g|^{(p-m)/m} g = 0,$$

con valores iniciales en el punto $\xi_0 \geq 0$

$$g(\xi_0) = g_0 \quad g'(\xi_0) = g'_0.$$

Por teoría general sabemos que si $g_0 > 0$, localmente existe una única solución que depende continuamente de los datos iniciales. Por tanto estudiaremos el caso en que $g_0 = 0$.

Lema 3.1.1 *Existe una única solución, $g(\xi)$, de la ecuación (3.1.1) con datos iniciales*

$$g(\xi_0) = 0 \quad g'(\xi_0) = d.$$

Demostración. Supongamos $d < 0$. Por continuidad, la función $g(\xi)$ es positiva en un entorno a la izquierda del punto ξ_0 .

Integrando dos veces la ecuación (3.0.3) entre ξ y ξ_0 , obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned} g(\xi) = & d(\xi_0 - \xi) + \beta \int_{\xi}^{\xi_0} t g(t)^{1/m} dt \\ & + \int_{\xi}^{\xi_0} (t - \xi) g(t)^{p/m} dt - (\alpha - \beta) \int_{\xi}^{\xi_0} (t - \xi) g(t)^{1/m} dt. \end{aligned}$$

Definimos la función $z(\xi)$ como

$$z(\xi) = \frac{g(\xi)}{\xi_0 - \xi} \quad z(\xi_0) = |d|.$$

Entonces, en términos de la función $z(\xi)$, la igualdad anterior se escribe como

$$\begin{aligned} z(\xi) = & |d| + \frac{\beta}{(\xi_0 - \xi)} \int_{\xi}^{\xi_0} t(\xi_0 - t)^{1/m} z(t)^{1/m} dt \\ & + \frac{1}{(\xi_0 - \xi)} \int_{\xi}^{\xi_0} (t - \xi)(\xi_0 - t)^{p/m} z(t)^{p/m} dt \\ & - \frac{(\alpha - \beta)}{(\xi_0 - \xi)} \int_{\xi}^{\xi_0} (t - \xi)(\xi_0 - t)^{1/m} z(t)^{1/m} dt. \end{aligned}$$

Nótese que al ser $z(\xi_0) = |d| > 0$, la potencia $\frac{p}{m}$ es Lipschitz en un entorno de ξ_0 . Consideremos el operador integral $T_v(\xi)$ igual al miembro derecho de la última igualdad y definido en

$$S_{\delta,k} = \{v \in C[\xi_0 - \delta, \xi_0] : v(\xi_0) = |d|, |d| - k \leq v \leq |d| + k\}.$$

Por un lado, para δ suficientemente pequeña tenemos que $T(S_{\delta,k}) \subset S_{\delta,k}$, ya que

$$\begin{aligned} T_v(\xi) \leq & |d| + \frac{m}{m+1} \xi_0 (\xi_0 - \xi)^{1/m} (|d| + k)^{1/m} \\ & + \frac{1}{2} (\xi_0 - \xi)^{(m+p)/m} (|d| + k)^{p/m} \leq |d| + k, \end{aligned}$$

y también

$$T_v(\xi) \geq |d| - \frac{\alpha + \beta}{2} (\xi_0 - \xi)^{(1+m)/m} (|d| + k)^{1/m} \geq |d| - k.$$

Por otro lado, sean $v_1(\xi)$ y $v_2(\xi)$ dos funciones de $S_{\delta,k}$ y sea

$$y(\xi) = \sup_{s \in [\xi_0 - \delta, \xi_0]} |v_1(s) - v_2(s)|.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |T_{v_1}(\xi) - T_{v_2}(\xi)| \leq & (L\xi_0(\xi_0 - \xi)^{1/m} + |\alpha - \beta|L(\xi_0 - \xi)^{(1+m)/m} + \\ & L'(\xi_0 - \xi)^{(m+p)/m}) y(\xi), \end{aligned}$$

donde las constantes L y L' son las constantes de Lipschitz. Por tanto tomando δ suficientemente pequeña, el operador integral es una contracción y aplicando el teorema del punto fijo de Banach concluimos que tiene un único punto fijo en $S_{\delta,k}$. Lo que implica que localmente a la izquierda del punto ξ_0 existe una única solución para la ecuación (3.1.1).

La existencia y unicidad de la solución a la derecha del punto ξ_0 , o suponiendo que $d > 0$, se demuestra siguiendo un razonamiento análogo. \square

Lema 3.1.2 En el caso $p > m$, la única solución de la ecuación (3.1.1) con datos iniciales

$$g(\xi_0) = 0 \quad g'(\xi_0) = 0,$$

es la solución trivial, $g \equiv 0$.

Demostración. Supongamos que existe una solución positiva en un entorno a la derecha de ξ_0 . Como el sistema es disipativo y la energía E_g es cero en el punto ξ_0 , tenemos que para todo $\xi > \xi_0$,

$$|g'| < \sqrt{\frac{2m}{p+m}} g^{(p+m)/2m}.$$

Por otro lado, por continuidad la función $g(\xi)$ es creciente en un entorno a la derecha de ξ_0 . Por tanto, integrando la desigualdad anterior se llega fácilmente a contradicción.

Supongamos ahora que existe una solución positiva en un entorno a la izquierda del punto ξ_0 en el cual la función $g(\xi)$ es decreciente. Integrando la ecuación (3.1.1) entre ξ y ξ_0 obtenemos que

$$-g' < \int_{\xi}^{\xi_0} g^{p/m} + \beta \xi g^{1/m}.$$

Como la función $g(\xi)$ es decreciente y acotada en $[\xi, \xi_0]$, tenemos que

$$-g' < g^{p/m} (\xi_0 - \xi + \beta \xi g^{(1-p)/m}) < C g^{p/m},$$

de donde integrando llegamos a contradicción.

Por la simetría de la ecuación (3.1.1), tampoco existe una solución negativa. \square

Lema 3.1.3 En el caso $p < m$, en un entorno de ξ_0 existe una única solución positiva (excepto en el punto ξ_0) de la ecuación (3.1.1) con datos iniciales

$$g(\xi_0) = 0 \quad g'(\xi_0) = 0.$$

Demostración. La demostración la haremos para un entorno a la izquierda de ξ_0 . Al igual que en los lemas anteriores la demostración a la derecha de ξ_0 se hace siguiendo un razonamiento análogo.

Como primer paso veremos que de existir una solución positiva, ésta verifica que

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{g(\xi)}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} = \left(\frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \right)^{m/(m-p)}.$$

Como el sistema es reactivo y la energía en ξ_0 es cero, tenemos que la energía es negativa en todo el intervalo $[0, \xi_0)$. Por tanto se verifica la desigualdad

$$(g')^2 < \frac{2m}{m+p} g^{(m+p)/m},$$

de donde integrando obtenemos la cota superior

$$g(\xi) < \left(\frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \right)^{m/(m-p)} (\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}.$$

Por otra parte,

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{-\xi(g^{1/m})'}{g^{p/m}} \leq C \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} g^{(2-p-m)/2m} = 0.$$

Por tanto, para ξ suficientemente cerca de ξ_0 se verifica

$$g'' - Cg^{p/m} \geq 0$$

e integrando obtenemos la cota inferior

$$g(\xi) > C(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}.$$

Nos queda por ver que ambas cotas tienen la misma constante. Para ello definimos

$$L = \liminf_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{g(\xi)}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}},$$

y aplicamos la regla de L'Hôpital, con lo que obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{m-p}{2m} \liminf_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{g'(\xi)}{(\xi_0 - \xi)^{(m+p)/(m-p)}} \\ &\geq \frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \liminf_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{g''(\xi)}{(\xi_0 - \xi)^{2p/(m-p)}} \\ &= \frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \liminf_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{g(\xi)^{p/m}}{(\xi_0 - \xi)^{2p/(m-p)}} \\ &= \frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \liminf_{\xi \rightarrow \xi_0} \left(\frac{g(\xi)}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} \right)^{p/m} = \frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} L^{p/m}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$L \geq \left(\frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \right)^{m/(m-p)}.$$

Por otro lado, de la cota superior se deduce la desigualdad contraria. Con lo que tenemos que

$$L = \left(\frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \right)^{m/(m-p)}.$$

Para demostrar la existencia y unicidad, actuaremos como en el caso en que $g'(\xi_0) \neq 0$. Integrando la ecuación dos veces entre ξ y ξ_0 , obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned} g(\xi) = & \beta \int_{\xi}^{\xi_0} t g(t)^{1/m} dt + \int_{\xi}^{\xi_0} (t - \xi) g(t)^{p/m} dt \\ & - (\alpha - \beta) \int_{\xi}^{\xi_0} (t - \xi) g(t)^{1/m} dt. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$z(\xi) = \frac{g(\xi)}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} \quad z(\xi_0) = \left(\frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \right)^{m/(m-p)},$$

la igualdad anterior, en términos de la función $z(\xi)$, se escribe como

$$\begin{aligned} z(\xi) = & \frac{\beta}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} \int_{\xi}^{\xi_0} t (\xi_0 - t)^{2/(m-p)} z(t)^{1/m} dt \\ & + \frac{1}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} \int_{\xi}^{\xi_0} (t - \xi) (\xi_0 - t)^{2p/(m-p)} z(t)^{p/m} dt \\ & - \frac{(\alpha - \beta)}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} \int_{\xi}^{\xi_0} (t - \xi) (\xi_0 - t)^{2/(m-p)} z(t)^{1/m} dt. \end{aligned}$$

Definimos el operador integral $T_v(\xi)$ como el segundo miembro de la última igualdad y consideramos el conjunto

$$S_{\delta,k} = \{v \in C[\xi_0 - \delta, \xi_0] : v(\xi_0) = \left(\frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \right)^{m/(m-p)},$$

$$v(\xi_0) - k \leq v(\xi) \leq v(\xi_0) + k\}.$$

Al igual que en el caso en que $g'(\xi_0) \neq 0$ tenemos que para δ suficientemente pequeña se verifica que $T(S_{\delta,k}) \subset S_{\delta,k}$.

Consideremos dos funciones $z_1(\xi)$ y $z_2(\xi)$ pertenecientes a $S_{\delta,k}$ y sea

$$y(\xi) = \sup_{s \in [\xi, \xi_0]} |z_1(s) - z_2(s)|.$$

Estudiemos el valor absoluto de las distintas integrales que aparecen al restar las ecuaciones de T_{z_1} y T_{z_2} :

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} \int_{\xi}^{\xi_0} t(\xi_0 - t)^{2/(m-p)} |z_1(t)^{1/m} - z_2(t)^{1/m}| dt \\ & \leq \frac{\beta}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} Ly(\xi) \int_{\xi}^{\xi_0} t(\xi_0 - t)^{2/(m-p)} dt \\ & \leq \beta Ly(\xi) \xi_0 (\xi_0 - \xi)^{(2-m-p)/(m-p)}, \end{aligned}$$

donde L es la constante Lipschitz de la potencia $\frac{1}{m}$. Acotando de la misma manera, tenemos que

$$\begin{aligned} & (\alpha - \beta) \int_{\xi}^{\xi_0} \frac{(t - \xi)(\xi_0 - t)^{2/(m-p)}}{(\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}} |z_1(t)^{1/m} - z_2(t)^{1/m}| dt \\ & \leq (\alpha - \beta) Ly(\xi) (\xi_0 - \xi)^{2(1-p)/(m-p)}. \end{aligned}$$

Para la siguiente integral, tendremos que afinar un poco más las acotaciones y en vez de usar que la potencia $\frac{p}{m}$ es Lipschitz en un entorno de ξ_0 (nótese que $z(\xi_0) \neq 0$), usaremos el teorema del valor medio, que nos dice que

$$|z_1(t)^{p/m} - z_2(t)^{p/m}| \leq \frac{p}{m} s(t)^{-(m-p)/m} |z_1(t) - z_2(t)|,$$

con $s(t)$ una función intermedia entre $z_1(t)$ y $z_2(t)$. Con lo cual, cuando t tiende a ξ_0

$$s(t) \rightarrow K = \left(\frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \right)^{m/(m-p)}.$$

Así pues, para t suficientemente cerca de ξ_0 , tenemos que $s(t) > K - \delta$. Por

tanto, para ξ suficientemente cerca de ξ_0 (δ pequeña), tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\xi}^{\xi_0} \frac{(t-\xi)(\xi_0-t)^{2p/(m-p)}}{(\xi_0-\xi)^{2m/(m-p)}} |z_1(t)^{p/m} - z_2(t)^{p/m}| dt \\ & \leq \frac{p}{m} \frac{y(\xi)}{(K-\delta)^{(m-p)/m}} \frac{1}{(\xi_0-\xi)^{2m/(m-p)}} \int_{\xi}^{\xi_0} (t-\xi)(\xi_0-t)^{2p/(m-p)} dt \\ & = \frac{p}{m} \left(\frac{K}{K-\delta} \right)^{(m-p)/m} y(\xi). \end{aligned}$$

Entonces, reuniendo todas las estimaciones de las distintas integrales, obtenemos que

$$\begin{aligned} |T_{z_1}(\xi) - T_{z_2}(\xi)| & \leq \left(\frac{p}{m} \left(\frac{K}{K-\delta} \right)^{\frac{(m-p)}{m}} + (\alpha - \beta)L(\xi_0 - \xi)^{2(1-p)/(m-p)} \right. \\ & \quad \left. + \beta L\xi_0(\xi_0 - \xi)^{(2-m-p)/(m-p)} \right) y(\xi). \end{aligned}$$

Por tanto, tomando ξ suficientemente cerca de ξ_0 , el operador integral es una contracción y aplicando el teorema del punto fijo de Banach concluimos que tiene un único punto fijo. Lo que implica que localmente a la izquierda del punto ξ_0 existe una única solución para la ecuación (3.1.1). \square

Gracias a estos resultados de unicidad obtenemos la dependencia continua de la soluciones con respecto a los datos iniciales, ver, por ejemplo, [Ha] (teorema 2.1, pg. 94). Más concretamente, tenemos demostrado el siguiente resultado.

Lema 3.1.4 *Sea g una solución de (3.0.3) tal que en un conjunto compacto $K = [0, \xi_1]$ se verifica*

$$(g(\xi))^2 + (g'(\xi))^2 \neq 0$$

para todo $\xi \in K$. Entonces, la función $g(\xi)$ y su derivada $g'(\xi)$ dependen continuamente del parámetro g_0 en el compacto K .

Como consecuencia inmediata de este resultado, obtenemos los dos siguientes corolarios.

Corolario 3.1.5 *El conjunto A^+ es abierto.*

Demostración. Sea $g_0 \in A^+$, y consideremos la sucesión $g_k(0)$ que converge a g_0 cuando k tiende a infinito.

Por definición de A^+ , existe un punto $\xi_1 < \infty$ para el cual la solución $g(\xi)$ se anula con pendiente distinta de cero. Por tanto, si tomamos δ suficientemente pequeño tal que $g(\xi_1 + \delta) < 0$ y consideramos el compacto $K = [0, \xi_1 + \delta]$, tenemos por el resultado anterior que para k suficientemente grande

$$g_k(\xi_1 + \delta) < 0,$$

de donde se deduce que $g_k(0) \in A^+$, por lo que el conjunto es abierto. \square

Corolario 3.1.6 *El conjunto $A^- \setminus \{c_*\}$ es abierto.*

Demostración. Sea $g_0 \in A^-$, $g_0 \neq c_*$, y consideremos la sucesión $g_k(0)$ que converge a g_0 cuando k tiende a infinito.

Por definición de A^- , existe un punto $\xi_1 < \infty$ para el cual la solución $g(\xi)$ tiene un punto de mínimo positivo. Por tanto si tomamos δ suficientemente pequeño tal que $g'(\xi_1 + \delta) > 0$ y consideramos el compacto $K = [0, \xi_1 + \delta]$, tenemos por el resultado anterior que para k suficientemente grande

$$g'_k(\xi_1 + \delta) > 0$$

de donde se deduce que $g_k(0) \in A^-$, por lo que el conjunto es abierto. \square

3.2 El caso conservativo, $p = m$

Al ser $p = m$, se anula el factor de expansión, β , y por tanto no tenemos ningún cambio de escala en espacio, $\xi = x$, y la autosemejanza es una separación de variables.

$$U(x, t) = (T - t)^\alpha F(x).$$

Como el sistema es conservativo tenemos que dada una constante E mayor que V_{\min} , la función g satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$(g')^2 = 2(E - V(g))$$

y por integración obtenemos la formula semiexplícita

$$\sqrt{2}x = \pm \int_{g_0}^g \frac{ds}{\sqrt{E - V(s)}} ds,$$

donde el signo depende de si la solución es creciente o decreciente.

Teorema 3.2.1 *La solución del problema de valores iniciales (3.0.3) verifica que*

- Si $g_0 < c'$ la solución es positiva y periódica.
- Si $g_0 > c'$ la solución cambia de signo en un punto finito x_0 que depende de la energía inicial de la solución.
- Si $g_0 = c'$ la solución, $G_1(x)$, es positiva, monótona decreciente y tiende a cero cuando x tiende a infinito.

En la siguiente gráfica representamos el plano de fases asociado a la ecuación (3.0.3). La solución más importante para nosotros es la solución $G_1(x)$, correspondiente a la órbita homoclínica en la figura 1. Es muy fácil ver que su comportamiento para x tendiendo a ∞ es

$$G_1(x) \sim e^{-x}$$

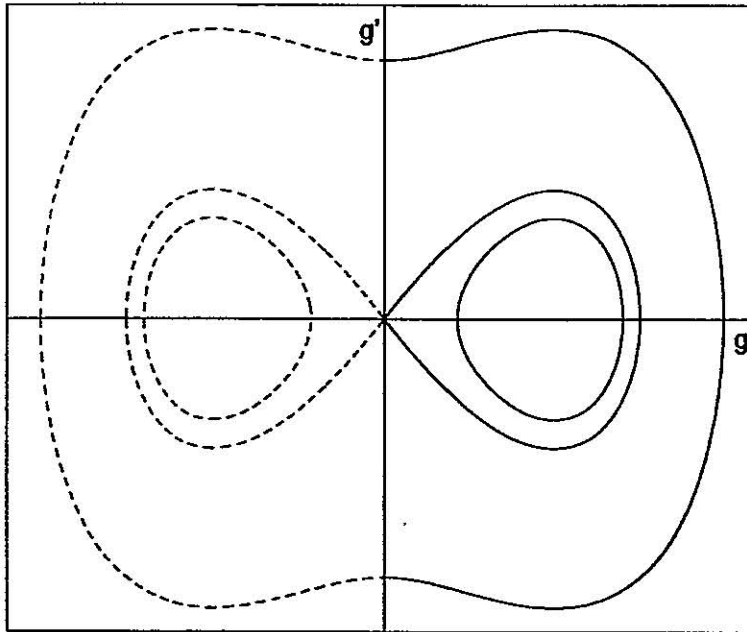


Figura 1

El lado izquierdo de la figura 1 corresponde a incluir valores negativos de g en la forma antisimétrica habitual para la ecuación (3.0.2)

$$g'' + \alpha|g|^{(1-m)/m}g - g = 0.$$

Que correspondería a la ecuación (1.0.1) extendida de la forma

$$u_t = (|u|^{m-1}u)_{xx} - |u|^{m-1}u.$$

3.3 Caso disipativo, $m < p$

3.3.1 Estudio de A^-

Lema 3.3.1 *El intervalo $(0, c_*) \in A^-$.*

Demostración. Si $g_0 \in (0, c_*)$ tenemos que el punto $\xi = 0$ es un punto de mínimo positivo. Por otro lado, por definición el punto c_* pertenece a A^- \square

3.3.2 Estudio de A^+

Para el estudio del conjunto A^+ vamos a necesitar trabajar con valores negativos de la solución del problema (3.0.3), por lo que consideraremos su forma antisimétrica, es decir, consideraremos el problema

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} g'' + \beta \xi (|g|^{\frac{1}{m}-1} g)' + \alpha |g|^{\frac{1}{m}-1} g - |g|^{\frac{p}{m}-1} g = 0 & \text{en } \xi > 0 \\ g(0) = g_0 \\ g'(0) = 0 \end{cases}$$

con su correspondiente ecuación de energía

$$(3.3.2) \quad \tilde{E}_g(\xi_2) = \tilde{E}_g(\xi_1) - \frac{\beta}{m} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi |g|^{(1-m)/m} (g')^2 d\xi,$$

donde la energía \tilde{E}_g viene definida por

$$(3.3.3) \quad \tilde{E}_g(\xi) = \frac{(g')^2}{2} + \tilde{V}(g), \quad \tilde{V}(g) = \alpha \frac{m}{m+1} |g|^{\frac{m+1}{m}} - \frac{m}{m+p} |g|^{\frac{m+p}{m}}.$$

Para tratar el comportamiento de las soluciones con g_0 grande, trabajaremos con una nueva ecuación, que consiste en quitar el último término a la ecuación del problema (3.3.1), es decir la ecuación

$$(3.3.4) \quad w'' + \beta \xi (|w|^{(1-m)/m} w)' + \alpha |w|^{(1-m)/m} w = 0.$$

Lema 3.3.2 *Sea w una solución de la ecuación (3.3.4), con condiciones iniciales $w(0) = w_0 > 0$ y $w'(0) = 0$. Entonces w se anula en un punto finito.*

Demostración.

1. Para todo $w_0 > 0$, la solución w es una versión reescalada de la solución w_1 , la cual tiene dato inicial, $w_1(0) = 1$. Si realizamos el cambio de escala

$$w = k w_1(\lambda \xi) \quad \text{con } k^{\frac{1-m}{m}} \lambda^2 = 1,$$

la ecuación queda invariante y $w(0) = k$.

2. Supongamos que w es estrictamente positiva. Integrando la ecuación (3.3.4) entre 0 y ξ obtenemos

$$w'(\xi) = -\beta\xi w(\xi)^{1/m} + (\beta - \alpha) \int_0^\xi w(s)^{1/m} ds.$$

Como $\beta < \alpha$, tenemos que $w'(\xi) < 0$. Además, para todo $\xi > \xi_0$ tenemos que

$$w'(\xi) < (\beta - \alpha) \int_0^{\xi_0} w(s)^{1/m} ds < (\beta - \alpha) w(\xi_0)^{1/m} \xi_0,$$

e integrando entre ξ_0 y ξ obtenemos que

$$w(\xi) < w(\xi_0) + (\beta - \alpha) w(\xi_0)^{1/m} \xi_0 (\xi - \xi_0).$$

Pero esto contradice que la función $w(\xi)$ sea positiva. Por tanto, debe existir un punto $\xi_0 < \infty$ donde w se anule.

□

Sea g la solución de (3.3.1), con dato $g_0 = k^{2/(1-m)}$. Definamos la función g_k como

$$g_k(\xi) = k^{-2/(1-m)} g(\xi/k).$$

Entonces, haciendo tender k a infinito, se verifica el siguiente resultado.

Lema 3.3.3 *La función $g_k(\xi)$ converge a $w(\xi)$. Donde $w(\xi)$ es solución de la ecuación (3.3.4), con condiciones iniciales $w(0) = 1$ y $w'(0) = 0$.*

Demostración. La función $g_k(\xi)$ verifica la ecuación diferencial

$$(g_k)'' + \beta\xi(|g_k|^{\frac{1}{m}-1}g_k)' + \alpha|g_k|^{\frac{1}{m}-1}g_k - k^{-2\frac{1-p}{1-m}}|g_k|^{\frac{p}{m}-1}g_k = 0$$

y las condiciones iniciales $g_k(0) = 1$ y $g_k'(0) = 0$.

Multiplicando la ecuación diferencial por g_k' , podemos encontrar su ecuación de energía y aplicando el hecho de que esta energía es una función decreciente, se obtiene que

$$|g_k| < C, \quad |g_k'| < C, \quad |g_k''| < C(1 + \xi).$$

Entonces, aplicando el teorema de Ascoli-Arzelá,

$$g_k \rightarrow w \quad \text{y} \quad g_k' \rightarrow w'$$

uniformemente sobre compactos. Por otro lado, en el lema anterior hemos demostrado que w se anula en un punto $\xi_0 < \infty$ con $w'(\xi_0) < 0$. Entonces, para k suficientemente grande y para $\delta > 0$ suficientemente pequeño

$$g_k(\xi + \delta) \sim w(\xi_0 + \delta) < 0.$$

Por tanto la función g_k se anula en $0 < \xi < \xi_0 + \delta$. Pero, si la función g_k se anula en un punto ξ_1 , por construcción, la función g se anula en el punto ξ_1/k . \square

3.3.3 Demostración del teorema A'

Para demostrar el teorema A, nos falta ver que existe una solución, con dato en A , que tiende a cero.

Como $(0, c_*) \in A^-$, el conjunto A^+ está acotado inferiormente y podemos definir

$$g_0 = \inf(A^+).$$

Consideramos la solución $g(\xi)$ con dato inicial g_0 . Del lema 3.1.2 y del hecho de que el conjunto A^+ es abierto se deduce que la función $g(\xi)$ es estrictamente positiva. Por otro lado, gracias a la dependencia continua con respecto a los datos iniciales tenemos que la función $g(\xi)$ es decreciente. Por tanto $g_0 \in A$.

Ahora bien, la energía de las soluciones con dato inicial en A^+ es positiva para todo punto ξ menor o igual que su punto de corte. Por tanto, obtenemos de la dependencia continua con respecto a los datos iniciales, que la energía de la solución $g(\xi)$ es no negativa, de donde se obtiene que g no puede tender a c_* y

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = 0.$$

Con lo que, para este caso, el teorema A' queda demostrado.

En la siguiente figura representamos el comportamiento de la función $g(\xi)$ para diferentes valores de g_0 . La línea discontinua representa la solución construida y las líneas punteadas son las soluciones explícitas c_* y la solución singular

$$(3.3.5) \quad g(x) = \left(\frac{2m(m+p)}{(p-m)^2} \right)^{m/(p-m)} \xi^{-2m/(p-m)}.$$

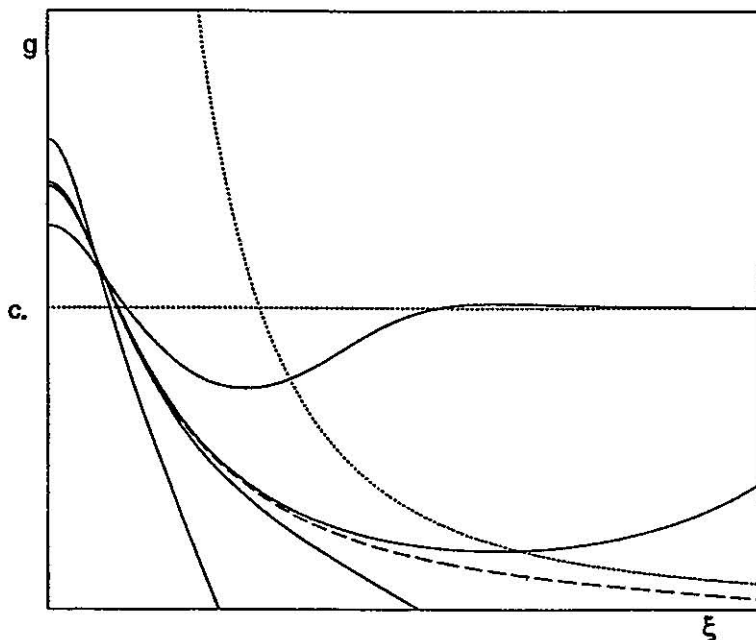


Figura 2

En el siguiente resultado, veremos que es precisamente la solución singular, dada en (3.3.5), la que da el comportamiento en infinito para la solución que hemos construido. Más concretamente

Lema 3.3.4 Sea g una solución positiva y monótona decreciente de la ecuación (3.3.1) que satisface las condiciones de contorno

$$g'(0) = 0 \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = 0.$$

Entonces, cuando $\xi \rightarrow \infty$, g se comporta como

$$g \sim G(\xi) = \left(\frac{2m(m+p)}{(p-m)^2} \right)^{m/(p-m)} \xi^{-2m/(p-m)}.$$

Demostración. Como la energía es una función monótona, existe su límite cuando ξ tiende a infinito; y como $g \rightarrow 0$ tenemos que también existe el límite de g' ; siendo el único posible cero. Entonces $E_g(\xi) \rightarrow 0$. Como el sistema es disipativo se verifica que

$$E_g(\xi) > 0 \quad \forall \xi > 0.$$

Esto implica que,

$$(g')^2 \geq \frac{2m}{p+m} g^{(m+p)/m} (1 + o(1))$$

cuando $\xi \rightarrow \infty$; e integrando entre ξ e infinito obtenemos la cota superior para g

$$g(\xi) \leq G(\xi)(1 + o(1)).$$

Por otro lado, si integramos la ecuación entre ξ e ∞ obtenemos

$$g' + \beta \xi g^{1/m} = - \left(\int_{\xi}^{\infty} g^{p/m} d\xi \right) (1 + o(1)).$$

Ahora bien, utilizando las estimaciones obtenidas para g y g'

$$\frac{\xi g^{1/m}}{|g'|} \leq O \left(\xi^{-\frac{2(1-p)}{p-m}} \right).$$

Por tanto podemos simplificar la ecuación anterior, obteniendo

$$g' = - \left(\int_{\xi}^{\infty} g^{p/m} d\xi \right) (1 + o(1)).$$

Nótese que la función $G(\xi)$ es una solución exacta para esta ecuación. Entonces, la cota inferior la obtenemos por comparación con $G(\xi)$. \square

3.4 Caso reactivo, $p < m$

3.4.1 Estudio de A^+

Lema 3.4.1 *El intervalo $[c', \infty) \in A^+$*

Demostración. Como el sistema es reactivo y $E_g(0) > 0$, tenemos que $E_g(\xi) > 0$ para todo $\xi > 0$.

Por tanto, la función no puede tener puntos de mínimo, ya que en dichos puntos la energía es negativa. Tampoco puede ser positiva, puesto que al ser monótona debería tender en infinito, a c_* o a cero, pero entonces la energía tendería a un número menor o igual que cero. \square

3.4.2 Estudio de A^-

Lema 3.4.2 *Para δ suficientemente pequeño, el intervalo $(0, c_* + \delta)$ pertenece al conjunto A^- .*

Demostración. Si $g_0 \in (0, c_*)$ tenemos que el punto cero es un punto de mínimo positivo, por tanto $(0, c_*) \in A^-$.

Para probar que $(c_*, c_* + \delta) \in A^-$ seguiremos los argumentos utilizados en [SGKM] para un problema de *blow-up*.

Estudiemos la linearización de la ecuación (3.0.3) entorno de c_* . El problema lineal asociado es el siguiente:

$$(3.4.1) \quad \Phi'' - a\xi\Phi' + b\Phi = 0$$

$$(3.4.2) \quad \Phi(0) = \Phi_0 \quad \Phi'(0) = 0,$$

$$\text{con } a = \frac{|\beta|}{m} c_*^{(1-m)/m} \text{ y } b = \frac{1-p}{m} c_*^{(p-m)/m}.$$

Si realizamos el cambio en la variable independiente

$$\xi = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \eta^{1/2}$$

la ecuación lineal se transforma en la ecuación hipergeométrica

$$\eta\Phi'' + \left(\frac{1}{2} - \eta\right)\Phi' + \frac{1-p}{m-p}\Phi = 0,$$

con condiciones iniciales

$$\Phi(0) = \Phi_0 \quad (\eta^{1/2}\Phi')(0) = 0.$$

Si tomamos el dato inicial $\Phi'(0) = 0$, podemos escribir la solución como una serie de Kummer, ver [BE]. En el caso en que

$$\frac{1-p}{m-p} = K,$$

con K entero, la función Φ es un polinomio de grado K . Además, tiene exactamente K ceros en $\eta > 0$, cf. [BE]. Esta igualdad se cumple si

$$1 > m = m_K = \frac{1-p}{K} + p.$$

También es sabido que, para todo $m_{K+1} < m < m_K$ la función Φ tiene $K+1$ ceros en $\eta > 0$, ver [BE]. En nuestro caso, $0 < p < m < 1$, entonces para que se verifique la desigualdad anterior, $K \geq 2$.

Por tanto, si tomamos $g(0) = c_* + \delta$, con δ suficientemente pequeña, obtenemos que la solución del problema no lineal corta, como poco dos veces, el nivel c_* . De donde se deduce que $g_0 \in A^-$. \square

3.4.3 Demostración del teorema A'

Una vez demostrado que el conjunto A es no vacío, estudiemos algunas de las propiedades de las soluciones, $g(\xi)$, con dato inicial $g_0 \in A$.

Al ser g una función no negativa y decreciente, se deduce que existe su límite cuando $\xi \rightarrow \infty$. Por otro lado, al ser la energía una función creciente también existe su límite cuando $\xi \rightarrow \infty$. Por tanto existe el límite de g' ; además dicho límite ha de ser cero.

Como el sistema es reactivo, se deduce inmediatamente que la función $g(\xi)$ tiende a cero cuando $\xi \rightarrow \infty$. En efecto, si suponemos que tiende a c_* , tenemos que

$$E_g(\xi) \rightarrow V(c_*) = E_{\min},$$

lo cual contradice que el sistema sea reactivo.

Debido a la propiedad de compactificación instantánea del soporte, dada en el lema 2.0.2, la función $g(\xi)$ tiene soporte compacto. Como en todo este capítulo estamos utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales ordinarias, daremos una prueba de este hecho basado en dichas técnicas. Más concretamente demostraremos el siguiente resultado:

Lema 3.4.3 *Toda solución no negativa de la ecuación (3.0.3) que satisfaga la condición*

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = 0,$$

tiene soporte compacto.

Demostración. Supongamos que la función $g(\xi)$ es estrictamente positiva para todo $\xi > 0$. Como $g \rightarrow 0$ tenemos que para ξ_0 suficientemente grande

$$g < c_* \quad \text{en } (\xi_0, \infty),$$

además, como los puntos de máximo de una solución han de estar por encima del nivel c_* , tenemos que

$$g' < 0 \quad \text{en } (\xi_0, \infty).$$

Además, como vimos anteriormente

$$g' \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \xi \rightarrow \infty.$$

Veamos que término "manda" en la ecuación (3.0.3) cuando ξ es grande. Al ser $p < 1$, el término $g^{p/m}$ "manda" sobre el término $g^{1/m}$. Para ver que $g^{p/m}$ "manda" también sobre el término $x(g^{1/m})'$ veremos que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{x(g^{1/m})'}{g^{p/m}} = 0.$$

Primero, del hecho de que tanto g como g' tienden a cero cuando ξ tiende a infinito se deduce que la energía E_g tiende a cero, y como el sistema es reactivo, debe ser negativa, de donde se obtiene la siguiente desigualdad:

$$-g' = |g'| \leq \sqrt{\frac{2m}{m+p}} g^{(m+p)/2m}.$$

Por otro lado, escribiendo la ecuación (3.0.3) en su forma divergencia

$$(3.4.1) \quad (g' - \beta \xi g^{1/m})' + (\alpha + \beta) g^{1/m} - g^{p/m} = 0$$

se observa que para ξ suficientemente grande la función $g' - \beta \xi g^{1/m}$ es creciente y negativa, por tanto es acotada y existe su límite cuando ξ tiende a infinito. Como $g' \rightarrow 0$ se deduce que

$$\xi g^{1/m} \rightarrow K < \infty.$$

Veamos que $K = 0$. Si por contradicción imponemos que $K \neq 0$, entonces para ξ suficientemente grande

$$g^{1/m} \sim \xi^{-1} \quad \text{y} \quad g^{p/m} \sim \xi^{-p}.$$

Por tanto $g^{p/m}$ no es integrable cerca de infinito. Ahora bien, integrando la ecuación (3.4.1) obtenemos que para $\xi \gg 1$

$$\begin{aligned} C \int_{\xi}^{\infty} g^{p/m} ds &\leq \int_{\xi}^{\infty} g^{p/m} ds - (\alpha + \beta) \int_{\xi}^{\infty} g^{1/m} ds \\ &= \int_{\xi}^{\infty} (g' - \beta \xi g^{1/m})' ds \leq C, \end{aligned}$$

lo que contradice que $g^{p/m}$ sea no integrable cerca de infinito. Por tanto,

$$\xi g^{1/m} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \xi \rightarrow \infty$$

y

$$\int_{\xi}^{\infty} g^{p/m} \leq C.$$

Mejoraremos esta última estimación, mediante un método iterativo. De la integración de la ecuación (3.4.1) hemos obtenido que

$$\int_{\xi}^{\infty} g^{p/m} \leq C (-g' + |\beta| \xi g^{1/m}).$$

Supongamos ahora que

$$\int_{\xi}^{\infty} g^{p/m} \leq C\xi^{-\gamma}$$

para algún $\gamma \geq 0$. Como la solución g es decreciente en (ξ_0, ∞) , tenemos que para ξ suficientemente grande se verifica

$$\xi g^{p/m} \leq \int_{\xi/2}^{\xi} g^{p/m} \leq C\xi^{-\gamma}.$$

De donde se deduce que

$$\xi g^{1/m} \leq C\xi^{1-(\gamma+1)/p},$$

por otra parte

$$-g' \leq C g^{(p+m)/2m} \leq C\xi^{-(\gamma+1)(p+m)/2p}.$$

Ahora bien, si definimos

$$\gamma_1 = \max \left(\frac{\gamma+1}{p} - 1, \frac{(\gamma+1)(p+m)}{2p} \right)$$

tenemos que $\gamma_1 > \gamma$ y que

$$\int_{\xi}^{\infty} g^{p/m} \leq C\xi^{-\gamma_1},$$

así pues hemos mejorado el exponente de decaimiento. Entonces iterando este proceso un número finito de veces podemos cubrir cualquier exponente. Por tanto tenemos que para todo $\gamma \geq 0$

$$\xi g^{\gamma} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

De esto se deduce que entre los términos $\xi(g^{1/m})'$ y $g^{p/m}$ "manda" el término $g^{p/m}$, ya que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi g^{(1-m)/m} (-g')}{g^{p/m}} \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi g^{(2-p-m)/2m} = 0.$$

Por tanto, para ξ suficientemente grande tenemos que

$$g'' - Cg^{p/m} \geq 0.$$

Integrando esta última desigualdad, obtenemos que para ξ suficientemente grande la función $g(\xi)$ es no acotada, lo cual es una contradicción. \square

En la siguiente figura representamos el comportamiento de la función $g(\xi)$ para diferentes valores del parámetro g_0 . La línea discontinua representa la solución construida.

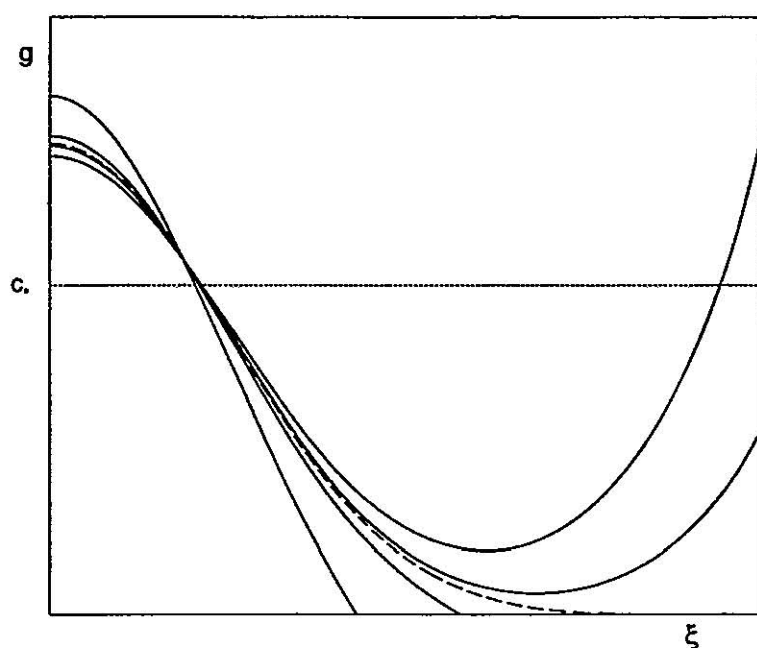


Figura 3

Se deduce del lema 3.1.3 que las soluciones con dato $g_0 \in A$ cerca de su frontera se comportan como

$$g(\xi) \sim \left(\frac{(m-p)^2}{2m(m+p)} \right)^{m/(m-p)} (\xi_0 - \xi)^{2m/(m-p)}.$$

Capítulo 4

Construcción de la función de Lyapunov

En este capítulo vamos a construir, formalmente, una función de Lyapunov siguiendo la técnica utilizada por Galaktionov, [Ga2], en el problema de *blow up*

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^p \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

en el rango de parámetros $p > m > 1$. Esta técnica está basada en un trabajo de Zelenyak, [Ze]. A estos trabajos hacemos referencia para los detalles.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} v_t = a(v)(v_{xx} + b(x, v, v_x)) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases}$$

con $a(v) \geq a_0 > 0$ (esta restricción se debe a que dividiremos por la función $a(v)$).

Definimos la función de Lyapunov como

$$L_v(t) = \int_{\mathbf{R}} \Phi(x, v, v_x) dx,$$

imponiendo que sea no creciente a lo largo de las órbitas $\{v(x, t) : t > t_0\}$.

$$\frac{d}{dt} L_v(t) = - \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{a(v)} \rho(x, v, v_x) (v_t)^2 dx \leq 0.$$

Por cálculo explícito, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int \Phi dx = \int (\Phi_v v_t + \Phi_w v_{tx}) dx.$$

Integrando por partes el último término

$$\int \Phi_w v_{tx} dx = - \int v_t \frac{\partial}{\partial x} \Phi_w dx = - \int (\Phi_{xw} + \Phi_{vw} v_x + \Phi_{ww} v_{xx}) v_t dx.$$

Finalmente, como $v_{xx} = \frac{v_t}{a} - b$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \int \Phi dx = \int \left\{ (\Phi_v - \Phi_{xw} - \Phi_{vw} v_x + b \Phi_{ww}) v_t - \frac{1}{a} \Phi_{ww} (v_t)^2 \right\} dx.$$

Por tanto, suponiendo que Φ y ρ son suficientemente regulares como para hacer todos los cálculos anteriores, podemos definirlos como las soluciones del sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\rho b = -\Phi_v + \Phi_{xw} + w \Phi_{vw}, \quad \rho = \Phi_{ww}.$$

De donde se obtiene, para $\rho(x, v, w)$, la ecuación lineal de primer orden

$$\rho b_w = \rho_x + w \rho_v - b \rho_w,$$

la cual se resuelve fácilmente por el método de las características:

$$\frac{d\xi}{1} = \frac{dv}{w} = \frac{dw}{-b} = \frac{d\rho}{-\rho b_w}.$$

Las tres primeras igualdades nos lleva a estudiar la ecuación diferencial

$$\phi'' + b(x, \phi, \phi') = 0,$$

con ciertas condiciones iniciales

$$\phi(x_0) = v_0 \quad \phi'(x_0) = w_0.$$

Llamaremos $\phi(x; x_0, v_0, w_0)$ a la solución de este último problema. Entonces, podemos escribir la curva característica que pasa por el punto (x_0, v_0, w_0) como

$$v(x) = \phi(x; x_0, v_0, w_0), \quad w(x) = \phi'(x; x_0, v_0, w_0).$$

Tomaremos $x_0 = 0$. Ahora bien, a lo largo de la curva característica podemos calcular la función ρ , obteniendo

$$\rho(x, v, w) = \rho(0, v_0, w_0) \exp \left\{ \int_0^x b_w(s) ds \right\},$$

donde $\rho(0, v_0, w_0)$ es una función regular arbitraria (la tomaremos igual 1). Por otro lado, la función b_w la calculamos a lo largo de la característica que une los puntos $(0, v_0, w_0)$ y (x, v, w) , es decir,

$$b_w(s) = b_w(s, \phi(s; 0, v_0, w_0), \phi'(s; 0, v_0, w_0)) .$$

Estos cálculos generan una función global $\rho(x, v, w)$ si la ecuación $\phi'' + b(x, \phi, \phi') = 0$ tiene una solución tal que $\phi(0) = v_0$, $\phi'(0) = w_0$, $\phi(x) = v$ y $\phi'(x) = w$.

Por otro lado, la función Φ viene dada por

$$\Phi(x, v, w) = \int_0^w (w - s)\rho(x, v, s) ds - \int_0^v b(x, s, 0)\rho(x, s, 0) ds .$$

Como se puede observar de las definiciones de $\Phi(x, v, w)$ y de $\rho(x, v, w)$, la regularidad de estas funciones está muy ligada a la regularidad de $\phi(x; x_0, v_0, w_0)$, tanto en la variable independiente x como con respecto a los parámetros x_0 , v_0 y w_0 .

Capítulo 5

Comportamiento cerca del tiempo de extinción, caso $p = m$

En este capítulo estudiaremos el comportamiento cerca del tiempo de extinción de una solución no negativa del problema de Cauchy

$$(5.0.1) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} - u^m & \text{en } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Sobre el dato inicial $u_0(x)$ imponemos las siguientes condiciones: $u_0(x)$ es una función continua, no negativa, simétrica, decreciente para $x > 0$, que tiende a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$ y además $u_0^m(x) \in H^1(\mathbb{R})$.

Demostraremos que estas soluciones convergen a la solución autosemejante

$$U(x, t) = (T - t)^\alpha G_1(x),$$

construida en el capítulo 3. Más concretamente

Teorema B1 *Cuando t se aproxima al tiempo de extinción T , tenemos que*

$$\lim_{t \rightarrow T} (T - t)^{-\alpha} |u(x, t) - U(x, t)| = 0$$

con convergencia uniforme para $x \in \mathbb{R}$.

5.1 Cambio de escala

Para estudiar el comportamiento cerca del tiempo de extinción introduciremos el siguiente cambio de escala

$$u(x, t) = (T - t)^\alpha f(x, \tau), \quad \tau = -\log(1 - \frac{t}{T}),$$

donde el exponente α es el exponente de autosemejanza.

Como $\tau \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow T$, el problema del comportamiento de $u(x, t)$ cerca del tiempo de extinción queda reducido al estudio del comportamiento asintótico del problema de Cauchy

$$\begin{cases} f_t = (f^m)_{xx} + \alpha f - f^m & \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ f(x, 0) = T^{-\alpha} u_0(x). \end{cases}$$

Por comodidad, trabajaremos con la función $v = f^m$, que transforma el problema anterior en el problema

$$(5.1.1) \quad \begin{cases} (v^{\frac{1}{m}})_t = v_{xx} + \alpha v^{\frac{1}{m}} - v & \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ v(x, 0) = T^{-\alpha m} u_0^m(x). \end{cases}$$

Obsérvese que los perfiles autosemejantes construidos en el capítulo 3 son las soluciones estacionarias del problema (5.1.1).

En cuanto al dato inicial, la función v_0 es continua, no negativa, simétrica, decreciente para $\xi > 0$, tiende a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$ y pertenece al espacio $H^1(\mathbb{R})$.

5.2 Estimaciones

En esta sección deduciremos estimaciones que aseguren la compacidad de las órbitas, siempre teniendo en cuenta las propiedades de v_0 .

Para obtener estas estimaciones utilizaremos la técnica de comparación de intersecciones. Será útil revisar la definición.

Definición Dadas $u(x, t)$ y $v(x, t)$ soluciones del problema (5.1.1) definimos el número de intersecciones $N(u, v, t)$ entre u y v como el número de cambios de signo de la función $f(\cdot) = u(\cdot, t) - v(\cdot, t)$.

El resultado fundamental que usaremos dice que el número de intersecciones es una función no creciente de t , ver [St, Sa, Ma].

Lema 5.2.1 Existe una constante $C = C(v_0)$, tal que la solución v satisface la estimación

$$c_* \leq \|v(\cdot, t)\|_\infty \leq C.$$

Demostración. La cota inferior es una consecuencia inmediata de la estimación *a priori* dada en el lema 2.0.5.

Para probar la cota superior seguiremos las ideas dadas en [Gal] para un problema de *blow-up*. Compararemos la solución con los perfiles autosemejantes construidos en el capítulo anterior, en particular con los perfiles

que cambian de signo. Consideramos la familia g_r de perfiles autosemejantes tales que

- tiene un máximo en $x = 0$ y cumple que $g_r(0) = L > \|v_0(x)\|_\infty$,
- $g_r(x)$ es positiva en $(-r, r)$,
- $g_r(-r) = 0 = g_r(r)$, y
- $N(g_r, v_0, 0) = 2$.

Aplicando el hecho de que $N(g_r, v, \tau)$ es una función decreciente de τ , tenemos que para todo τ

$$N(g_r, v, \tau) \leq 2.$$

1. $N(g_r, v, \tau_0) = 0$ es imposible, pues esto significaría que

$$g_r(x) < v(x, \tau_0) \quad \text{en } [-r, r].$$

Volviendo a las variables originales, (x, t) , tendríamos dos soluciones de (5.0.1) que satisfacerían

$$G(x, t) = (T - t_0)^\alpha g_r^{\frac{1}{m}}(x) < (T - t_0)^\alpha v^{\frac{1}{m}}\left(x, -\log\left(1 - \frac{t_0}{T}\right)\right).$$

Pero entonces, para ε suficientemente pequeño

$$G_\varepsilon(x, t_0) = (T + \varepsilon - t_0)g_r^{\frac{1}{m}}(x) < u(x, t_0).$$

Ahora bien, considerando la ecuación (5.0.1) en el intervalo $[-r, r]$ con condiciones Dirichlet homogéneas y $t > t_0$, por comparación tendríamos que

$$G_\varepsilon(x, t) < u(x, t) \quad \text{en } [-r, r] \times (t_0, T).$$

Por tanto el tiempo de extinción de u sería mayor que T , lo cual es una contradicción.

2. $N(g_r, v, \tau_0) = 1$ es imposible, pues g es de soporte compacto y $v(\cdot, t_0)$ es positiva.

Entonces, la única posibilidad es que $N(g_r, v, \tau) = 2$ para todo $\tau > 0$. Pero teniendo en cuenta que $g_r(\pm r) < v(\pm r, \tau)$, se deduce de forma evidente que

$$v(0, \tau) < g_r(0),$$

y por tanto, la función $v(x, \tau)$ es acotada. \square

Por otro lado, se sigue de la estimación *a priori* dada en el lema 2.0.6 que

$$|v_x(\cdot, t)| < C \frac{v}{\sqrt{t}}.$$

Esta estimación y las obtenidas para v en el lema anterior, implican que la función $v(\xi, \tau)$ es también Hölder continua en τ , ver [Gi], [Ka2]. Podemos entonces establecer el siguiente resultado.

Lema 5.2.2 *La órbita $\{v(x, \tau), \tau > \tau_0\}$ de una solución es compacta en el siguiente sentido: para cada sucesión $\{\tau_j\} \rightarrow \infty$ la familia $\{v(x, \tau_j + s)\}$ es compacta en $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+ : C(\mathbb{R}))$.*

El siguiente resultado nos proporcionará un control sobre los conjuntos de nivel de la solución $v(x, \tau)$.

Lema 5.2.3 *Si $c > c_*$ entonces existe una constante C tal que*

$$\mu\{x \in \mathbb{R} : v(\cdot, \tau) > c\} < C,$$

donde μ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{\tau_j\} \rightarrow \infty$ tal que

$$\mu\{x \in \mathbb{R} : v(\cdot, \tau_j) > c\} \rightarrow \infty.$$

Como la órbita es compacta, tenemos que

$$\lim_{\tau_j \rightarrow \infty} v(x, \tau + \tau_j) = h(x, \tau)$$

uniformemente en compactos, con $h(x, \tau)$ solución de (5.1.1).

Por otro lado, del principio fuerte del máximo, cf. [Fr], tenemos que la función $v(\cdot, \tau_j)$ es decreciente para $x > 0$. Por tanto,

$$h(x, 0) \geq c.$$

Consideremos el problema (5.1.1) con dato inicial $\tilde{v}(x, 0) = c$. Si reescribimos el problema en las variables originales (x, t) , tenemos que

$$\tilde{u}(x, 0) = T^\alpha c^{1/m} = (T')^\alpha c_*^{1/m}.$$

Por tanto, la solución viene dada por

$$\tilde{u}(x, t) = (T' - t)^\alpha c_*^{1/m},$$

la cual se anula en tiempo $T' = T(c/c_*)^{(1-m)/m} > T$. Esto implica, volviendo a las variables reescaladas, que la solución $\tilde{v}(x, \tau)$ diverge cuando $\tau \rightarrow \infty$ y por comparación, $h(x, \tau)$ también lo hará. Entonces, por dependencia continua, la órbita original es no acotada, obteniéndose una contradicción. \square

5.3 Función de Lyapunov

Debido a la forma de la ecuación (5.1.1), la construcción de la función de Lyapunov es mucho más sencilla que la dada en el capítulo anterior. Basta multiplicar por v_τ e integrar en todo \mathbb{R} . Así, definimos la función de Lyapunov como

$$L_v(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |v_x|^2 - \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{m\alpha}{m+1} v^{(m+1)/m} - \frac{1}{2} v^2 \right) dx,$$

que es no creciente sobre las órbitas. Es fácil ver que

$$\frac{d}{d\tau} L_v(\tau) = -\frac{4m}{(1+m)^2} \int_{\mathbb{R}} ((v^{(1+m)/2m})_\tau)^2 dx \leq 0.$$

(Nótese que estas funciones coinciden con las obtenidas en el capítulo 4). Por definición, tenemos que para todo $0 \leq \tau_1 < \tau$,

$$\frac{4m}{(1+m)^2} \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\mathbb{R}} ((v^{(1+m)/2m})_\tau)^2 dx d\tau = L_v(\tau_1) - L_v(\tau).$$

Por como está definida L_v , tenemos la cota inferior

$$L_v(\tau) > -\frac{m\alpha}{1+m} \int_{\{x: v > c_*\}} v^{(1+m)/m} dx,$$

y debido a las estimaciones y al control de los conjuntos de nivel de v estudiados en la sección anterior (lemas 5.2.1 y 5.2.3), obtenemos que existe una constante independiente de τ tal que

$$L_v(\tau) > -C.$$

Por otro lado, la función L_v es no creciente y el dato inicial v_0 pertenece al espacio $H^1(\mathbb{R})$. Entonces,

$$L_v(\tau_1) \leq L_v(0) \leq C.$$

De todas estas acotaciones se deduce, de forma inmediata, el siguiente resultado.

Lema 5.3.1 *Para todo tiempo $\tau > \tau_1$ se verifica la acotación*

$$\int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\mathbb{R}} ((v^{(1+m)/2m})_\tau)^2 dx d\tau < C,$$

donde la constante C es independiente de τ .

5.4 Paso al límite. Demostración del teorema B1

Usando el resultado de compacidad de las órbitas (lema 5.2.2), dada una sucesión arbitraria $\tau_j \rightarrow \infty$, podremos pasar al límite sobre conjuntos compactos (para alguna subsucesión) y tendremos que cuando $\tau_j \rightarrow \infty$,

$$v(x, \tau_j + s) \rightarrow h(x, s),$$

donde la función $h(x, s)$ es solución del problema (5.1.1).

Lema 5.4.1 *La función $h(x, s)$ es una solución estacionaria de (5.1.1).*

Demostración. Por comodidad, vamos a definir $\gamma = (1 + m)/2m$. Gracias al resultado obtenido en la sección anterior tenemos que dado $s > 0$ se verifica que

$$\begin{aligned} \|v^\gamma(\cdot, \tau_j + s) - v^\gamma(\cdot, \tau_j)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |v^\gamma(x, \tau_j + s) - v^\gamma(x, \tau_j)|^2 dx \\ &\leq s \int_{\mathbb{R}} \int_{\tau_j}^{\tau_j + s} |\partial_\tau v^\gamma(x, \tau)|^2 d\tau dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando τ_j tiende a infinito (uniformemente para $s < \infty$). Por tanto, la sucesión $h_j^\gamma(x, s) = v^\gamma(x, \tau_j + s)$ converge en el espacio $L^\infty([0, \tau] : L^2(\mathbb{R}))$ para todo $\tau > 0$ a la función límite $h^\gamma(x)$; la cual no depende de s , por lo que ha de ser una solución estacionaria de (5.1.1). \square

5.4.1 Identificación del límite

Por cómo hemos elegido el dato inicial v_0 , tenemos que para cada tiempo $\tau > 0$, la función $v(\cdot, \tau)$ es positiva, simétrica y decreciente en $x > 0$.

En la sección anterior vimos que la órbita $\{v(x, t) : t \geq t_0\}$ converge a una solución estacionaria y la única solución estacionaria positiva, simétrica y decreciente en $x > 0$, es la función $G_1(x)$ construida en el capítulo anterior. Por tanto, tenemos que cuando $\tau \rightarrow \infty$,

$$v(x, \tau) \rightarrow G_1(x).$$

Volviendo a las variables originales, se prueba el teorema B1.

Capítulo 6

Comportamiento cerca del tiempo de extinción, caso $m < p$.

Para estudiar el comportamiento cerca del tiempo de extinción, es conveniente introducir las variables reescaladas

$$\xi = x(T - t)^\beta, \quad \tau = -\log \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

En las nuevas variables la función reescalada

$$f(\xi, \tau) = (T - t)^{-\alpha} u(\xi(T - t)^{-\beta}, t)$$

verifica la ecuación

$$f_\tau = (f^m)_{\xi\xi} + \beta\xi f_\xi + \alpha f - f^p$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$. Como en el caso crítico ($p = m$), introducimos la función $v = f^m$ que verifica la ecuación

$$(6.0.1) \quad (v^{\frac{1}{m}})_\tau = v_{\xi\xi} + \beta\xi (v^{\frac{1}{m}})_\xi + \alpha v^{\frac{1}{m}} - v^{\frac{p}{m}}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$. Además toma el dato inicial

$$v(\xi, 0) = v_0(\xi) = T^{-\alpha m} u_0^m(xT^{-\beta}).$$

En este caso, al dato inicial $u_0(x)$ le exigiremos que verifique las siguientes propiedades: que sea una función continua, no negativa, simétrica, decreciente para $x > 0$ y con soporte compacto. Entonces, por definición, la función $v_0(\xi)$ satisface las mismas propiedades.

Teorema B2 *Dada $v_0(\xi)$ que satisfaga las hipótesis anteriores, tenemos que el ω -límite está incluido en el conjunto de soluciones estacionarias construidas en el capítulo 3. Es decir,*

$$\omega(v_0) \subseteq \left\{ \begin{array}{l} g = g(\xi) : g(\cdot) \text{ es una solución estacionaria de (6.0.1),} \\ \text{la cual es positiva y tiende a 0 cuando } |\xi| \rightarrow \infty \end{array} \right\}.$$

Nota. En este caso, no podemos decir que el ω -límite esté formado por un solo elemento, ya que en el capítulo 3 no demostramos la unicidad del perfil autosemejante con dato inicial en el conjunto A .

6.1 Estimaciones

Como en caso $p = m$, para tener un control de la órbita necesitamos el siguiente resultado:

Lema 6.1.1 *La solución de la ecuación (6.0.1) con dato inicial v_0 satisface:*

- $c_* < \|v(\cdot, \tau)\|_\infty < C$,
- La órbita $v(\cdot, \tau)$, con $\tau > \tau_0$, es compacta en $L^\infty(\mathbb{R}^+ : C(\mathbb{R}))$, y
- $\mu\{\xi : v(\cdot, \tau) > c_*\} < C$.

Demostración. Los dos primeros puntos son consecuencia de las estimaciones *a priori* y de la comparación de intersecciones. Ver el caso $p = m$ para los detalles.

Para probar el tercer punto, compararemos la solución con la supersolución

$$\bar{g}(\xi) = \left(\frac{2m(m+p)}{(p-m)^2} \right)^{1/(p-m)} (\xi - \xi_0)^{-2m/(p-m)},$$

para $\xi_0 > 0$ elegido adecuadamente. Como el dato inicial tiene soporte compacto, existe $L > 0$ con $v_0(\xi) = 0$ en $\xi \geq L$. Tomamos $\xi_0 > 0$ tal que $\bar{g}(L) = c_*$ y por comparación obtenemos que para todo tiempo $\tau > 0$ y todo $\xi > \xi_0$

$$v(\xi, \tau) < \bar{g}(\xi).$$

Entonces, para todo $\tau > 0$ el conjunto $\{\xi : v(\cdot, \tau) > c_*\} \subset [-L, L]$. \square

6.2 Función de Lyapunov

Al construir la función de Lyapunov, siguiendo los cálculos del capítulo 4, tenemos que la función $\rho(\xi, v, v_\xi)$ viene dada en términos de la curva característica que une los puntos $(0, v_0, w_0)$ y (ξ, v, v_ξ) . En este caso, nos encontramos con el problema de la existencia de perfiles autosemejantes que son singulares, por lo que consideraremos la ecuación aproximada

$$(6.2.1) \quad v_\tau = a(v) \left(v_{\xi\xi} + b(\xi, v, v_\xi; M) \right),$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a(v) = m|v|^{-(1-m)/m}$$

y $b(\xi, v, w; M)$ lo corregimos para $v > M$; de tal forma que la curva característica $\phi(\xi; \xi_0, v_0, w_0, M)$ sea una función acotada que depende continuamente de los parámetros ξ_0 , v_0 y w_0 . Por ejemplo, podemos tomar la función C^∞

$$b(\xi, v, w; M) = \begin{cases} \frac{\rho}{m} \xi |v|^{(1-m)/m} w + (\alpha |v|^{1/m} - |v|^{p/m}) \text{signo}(v) & |v| < M, \\ (\alpha |v|^{1/m} - |v|^{p/m}) \text{signo}(v) & |v| > 2M. \end{cases}$$

Entonces podemos justificar todos los cálculos realizados en el capítulo 4 y construir las funciones $\Phi(\xi, v, w; M)$ y $\rho(\xi, v, w; M)$, que vendrán dadas por

$$\rho(\xi, v, w; M) = \exp \left(C \int_0^\xi s |\phi(s; 0, \phi(0; \xi, v, w), \phi'(0; \xi, v, w), M)|^{(1-m)/m} ds \right),$$

$$\Phi(\xi, v, w; M) = \int_0^w (w - s) \rho(\xi, v, s; M) ds - \int_0^v \rho(\xi, s, 0; M) b(\xi, s, 0; M) ds.$$

Por otro lado, en la sección anterior vimos que la órbita del problema de evolución original está globalmente acotada, por tanto si en los problemas aproximados elegimos M_0 suficientemente grande (mayor que la cota de la órbita del problema original), tenemos que la solución del problema original es una solución del problema aproximado. Por tanto utilizaremos la función $\Phi(\xi, v, w; M_0)$ como función de Lyapunov para nuestro problema original.

Debido a las propiedades de la función $\phi(\xi; \xi_0, v_0, w_0, M_0)$ y a cómo están definidas las funciones $\rho(\xi, v, w; M_0)$ y $\Phi(\xi, v, w; M_0)$, podemos deducir, de forma inmediata, el siguiente resultado:

Lema 6.2.1 1. Para todo (ξ, v, w) , $\rho(\xi, v, w) \geq 1$.

2. Para todo (ξ, v, w) acotado las funciones $\Phi(\xi, v, w; M)$ y $\rho(\xi, v, w; M)$ están uniformemente acotadas.

3. $\Phi(\xi, v, w) \geq 0$ si $0 \leq v \leq c_*$.

6.3 Paso al límite. Demostración del teorema B2

Una vez construida la función de Lyapunov, estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado.

Lema 6.3.1 Para todo tiempo $\tau > \tau_1$ se verifica la acotación

$$\int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\mathbf{R}} ((v^{(1+m)/2m})_{\tau})^2 d\xi d\tau < C$$

Demostración. Por la acotación obtenida antes para la función $\rho(\xi, v, v_{\xi}; M_0)$, tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\mathbf{R}} (\partial_{\tau} v^{(1+m)/2m})^2 d\xi d\tau &= \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\mathbf{R}} v^{(1-m)/m} (v_{\tau})^2 d\xi d\tau \\ &\leq \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{a(v)} \rho(\xi, v, v_{\xi}; M_0) (v_{\tau})^2 d\xi d\tau \\ &= L_v(\tau_1; M_0) - L_v(\tau; M_0). \end{aligned}$$

Por otro lado, de la definición de la función $\Phi(\xi, v, v_{\xi}, M_0)$ y gracias al control que obtuvimos en la sección anterior para los conjuntos de nivel de la órbita $v(\cdot, \tau)$, tenemos que

$$\begin{aligned} L_v(\tau; M_0) &= \int_{\mathbf{R}} \Phi(\xi, v, v_{\xi}; M_0) dx \\ &\geq - \int_{\{v > c_*\}} \alpha M_0^{1/m} \left(\int_0^v \rho(\xi, s, 0) ds \right) d\xi \geq -C. \end{aligned}$$

Ahora bien, por las condiciones impuestas al dato inicial, $v_0(\xi)$, y el hecho de que la función $L_v(\tau; M_0)$ sea decreciente sobre las órbitas, se deduce la desigualdad

$$L_v(\tau_1; M_0) < L_v(0; M_0) < C.$$

Entonces, juntando todas las desigualdades, concluimos el resultado deseado. \square

Gracias al último resultado y a la compacidad de las órbitas, demostrada en la sección anterior, podemos repetir el mismo argumento dado para el caso crítico, $p = m$, y deducir que uniformemente sobre compactos la órbita converge a una solución estacionaria de la ecuación (6.0.1).

Por otro lado la solución $v(\cdot, \tau)$ es una función positiva y decreciente para $\xi > 0$ y las únicas soluciones estacionarias que verifican estas propiedades son las construidas en el capítulo 3. Este último hecho termina la demostración del teorema B2.

Capítulo 7

Comportamiento cerca del punto de extinción, caso $p < m$

Como en los casos anteriores, para estudiar el comportamiento cerca del punto de extinción introducimos las nuevas variables

$$\xi = x(T - t)^{-|\beta|} \quad \tau = -\log \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

y la función reescalada

$$f(\xi, \tau) = (T - t)^{-\alpha} u(\xi(T - t)^{|\beta|}, t).$$

De nuevo, trabajaremos, no con la función $f(\xi, \tau)$, sino con la función $v = f^m$, que verifica la ecuación

$$(7.0.1) \quad (v^{\frac{1}{m}})_\tau = v_{\xi\xi} - |\beta|\xi(v^{\frac{1}{m}})_\xi + \alpha v^{\frac{1}{m}} - v^{\frac{p}{m}},$$

y que toma como dato inicial

$$v(\xi, 0) = v_0(\xi) = T^{\alpha m} u_0(\xi T^{|\beta|}).$$

Al dato inicial $u_0(x)$ le impondremos que sea una función continua, no negativa, simétrica, decreciente para $x > 0$ y de soporte compacto. Nótese que estas propiedades las hereda la función $v_0(\xi)$.

Al igual que en el caso $p > m$, en el capítulo 3 no hemos podido demostrar la unicidad del perfil autosemejante, por lo que no podemos identificar el límite de las órbitas (más que en casos particulares). Lo que sí podemos hacer es dar un resultado en función del ω -límite.

Teorema B3 *Dada $v_0(\xi)$ satisfaciendo las hipótesis anteriores, tenemos que el ω -límite está incluido en el conjunto de soluciones estacionarias, es*

decir,

$$\omega(v_0) \subseteq \left\{ \begin{array}{l} g = g(\xi) : g(\cdot) \text{ es una solución estacionaria de (7.0.1),} \\ \text{la cual es positiva, decreciente para } \xi > 0 \text{ y} \\ \text{tiende a 0 cuando } |\xi| \rightarrow \infty \end{array} \right\}.$$

7.1 Estimaciones

Como en los casos anteriores, necesitamos tener un control sobre la solución $v(\xi, \tau)$.

Lema 7.1.1 *La solución, $v(\xi, \tau)$, de la ecuación (7.0.1) con dato inicial v_0 , verifica:*

- $c_* < \|v(\xi, \tau)\|_\infty < C$,
- la órbita $v(\xi, \tau)$ es compacta en $L^\infty(\mathbb{R}^+ : C(\mathbb{R}))$,
- $\mu\{\xi : v(\cdot, \tau) > c'\} < C$.

Demostración. La demostración es exactamente la misma que en el caso $p = m$, al cual hacemos referencia. \square

7.2 Función de Lyapunov

En este caso, al intentar construir la función de Lyapunov, nos encontramos con el problema de la no unicidad de la función $\phi(\xi; \xi_0, 0, 0)$; definida en el capítulo 4 como la solución del problema de valor inicial

$$(7.2.1) \quad \begin{cases} \phi'' - \frac{|\beta|}{m} \xi |\phi|^{(1-m)/m} \phi' + (|\phi|^{1/m} - |\phi|^{p/m}) \text{signo}(\phi) = 0 \\ \phi(\xi_0) = 0 \quad \phi'(\xi_0) = 0, \end{cases}$$

Dicha no unicidad nos impide definir bien la curva característica que pasa por un punto de la forma $(\xi_0, 0, 0)$; y por tanto no podemos construir la función $\rho(\xi, v, w)$.

Por otro lado, el problema (7.2.1) tiene unicidad si imponemos a la función $\phi(\xi)$ la condición extra de positividad en un entorno de ξ_0 . Ver lema 3.1.3.

Por tanto, si definimos las curvas características que parten de puntos de la forma $(\xi_0, 0, 0)$ como la única solución positiva del problema (7.2.1), obtenemos el siguiente resultado:

Lema 7.2.1 Para todo $0 \leq \xi_0 < \infty$, $0 \leq v_0 < \infty$ y $-\infty < w_0 < \infty$ existe una única curva característica $\phi(\xi; \xi_0, v_0, w_0)$ acotada en $[0, \xi_0]$. Además, la función $|\phi|$ es continua con respecto a los parámetros (ξ_0, v_0, w_0) .

Demostración. El hecho de ser acotada se debe a que el sistema es disipativo (nótese que disparamos hacia atrás). Por otro lado, si la curva característica pasa por un punto de la forma $(\xi, 0, 0)$, al haber elegido la solución positiva perdemos la dependencia continua de la función ϕ con respecto a los parámetros (ξ_0, v_0, w_0) , pero debido a la simetría de la ecuación (7.2.1) la función $|\phi|$ sí conserva la dependencia continua con respecto a los parámetros. \square

Gracias a este resultado obtenemos que las funciones $\Phi(\xi, v, w)$ y $\rho(\xi, v, w)$ son lo suficientemente regulares como para realizar los cálculos del capítulo 4. En este caso, dichas funciones vienen dadas por

$$\rho(\xi, v, w) = \exp \left(-\frac{|\beta|}{m} \int_0^\xi s |\phi(s; 0, \phi(0; \xi, v, w), \phi'(0; \xi, v, w))|^{\frac{1-m}{m}} ds \right)$$

$$\Phi(\xi, v, w) = \int_0^w (w-s) \rho(\xi, v, s) ds - \int_0^v \rho(\xi, s, 0) (\alpha s^{1/m} - s^{p/m}) ds.$$

Además, tenemos que verifican las siguientes acotaciones.

Lema 7.2.2 Para todo $0 < \xi < \infty$, $0 \leq v \leq \infty$ y w , se tienen las siguientes estimaciones:

$$\exp(-C\xi^2) \leq \rho(\xi, v, w) \leq 1$$

$$\Phi(\xi, v, w) \geq \begin{cases} -C|v|^{(1+m)/m} & |v| > c, \\ 0 & |v| \leq c \end{cases}$$

para toda $c > c_*$.

7.3 Paso al límite. Demostración del teorema B3

Con las acotaciones obtenidas en la sección anterior, es fácil ver que la función $v(\xi, \tau)$ satisface la siguiente propiedad:

Lema 7.3.1 Para todo tiempo $\tau > \tau_1$ y para todo $L > 0$ se verifica que

$$\int_{\tau_1}^{\tau} \int_{-L}^L ((v^{(1+m)/2m})_{\tau})^2 d\xi d\tau \leq C.$$

Demostración. De las acotaciones obtenidas para la función $\rho(\xi, v, v_\xi)$ se sigue la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{-L}^L ((v^{(1+m)/2m})_{\tau})^2 d\xi d\tau &\leq e^{CL^2} \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{-L}^L e^{-C\xi^2} ((v^{(1+m)/2m})_{\tau})^2 d\xi d\tau \\ &\leq Ce^{CL^2} \int_{\tau_1}^{\tau} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{a(v)} \rho(\xi, v, v_\xi) (v_{\tau})^2 d\xi d\tau \\ &= Ce^{CL^2} (L_v(\tau_1) - L_v(\tau)). \end{aligned}$$

Ahora bien, la función $L_v(\tau)$ es decreciente y por cómo hemos tomado el dato inicial $v_0(\xi)$, podemos afirmar que

$$L_v(\tau_1) \leq L_v(0) \leq C.$$

Por otro lado, de las desigualdades obtenidas para Φ y del control sobre los conjuntos de nivel de la función $v(\xi, \tau)$, se concluye que

$$L_v(\tau) = \int_{\mathbf{R}} \Phi(\xi, v, v_\xi) d\xi \geq -C \int_{\{v > c_0\}} v^{(1+m)/m} d\xi \geq -C.$$

Por tanto, juntando todas estas desigualdades, se obtiene el resultado deseado. \square

Gracias a esta cota y a la compacidad de las órbitas, podemos repetir el argumento usado en los otros casos, y concluir que la órbita $\{v(\xi, \tau) : \tau > \tau_1\}$ converge uniformemente sobre compactos a una solución estacionaria de la ecuación (7.0.1).

Por otro lado la solución $v(\cdot, \tau)$ es una función no negativa y decreciente para $\xi > 0$; pero las únicas soluciones estacionarias que verifican estas propiedades son las construidas en el capítulo 3. Con lo cual, el teorema B3 queda demostrado.

7.3.1 Identificación del límite: un caso particular

En el capítulo 3 vimos que el conjunto A es un conjunto compacto. Por tanto podemos definir $g_{\min}(\xi)$ y $g_{\max}(\xi)$ como las soluciones de (3.0.3) con dato inicial $g_{\min}(0) = \min A$ y $g_{\max}(0) = \max A$.

Por otro lado, si al dato inicial $v_0(\xi)$ le imponemos que sea una función continua, no negativa, simétrica, decreciente para $\xi > 0$, de soporte compacto, que $v_0(0) < g_{\min}(0)$ y tal que el número de cortes en el intervalo $(0, \infty)$ con $g_{\min}(\xi)$ sea uno, tenemos que se verifica el siguiente resultado:

Teorema 7.3.2 Sea $v_0(\xi)$ verificando las condiciones antes mencionadas. Entonces, cuando $\tau \rightarrow \infty$,

$$v(\xi, \tau) \rightarrow g_{\min}(\xi)$$

uniformemente sobre conjuntos compactos.

Demostración. Como el número de cortes entre dos soluciones es una función no creciente y las dos soluciones, en variables (x, t) , tienen el mismo tiempo de extinción, tenemos que para todo tiempo τ

$$N(g_{\min}, v, \tau) = 2.$$

(Nótese que el número de cortes es 2 por simetría). Pero entonces tenemos que para todo tiempo $\tau > 0$ se verifica que

$$v(0, \tau) < g_{\min}(0).$$

Por otro lado, sabemos que el ω -límite de v_0 está formado por los perfiles con dato inicial $g_0 \in A$. Pero debido a la desigualdad anterior el único perfil posible es g_{\min} , por tanto tenemos que cuando $\tau \rightarrow \infty$

$$v(\xi, \tau) \rightarrow g_{\min}(\xi)$$

uniformemente sobre compactos. \square

Evidentemente tenemos un resultado análogo para g_{\max} .

Teorema 7.3.3 Sea $v_0(\xi)$ una función continua, no negativa, simétrica, decreciente en $\xi > 0$, con soporte compacto, que $v_0(0) > g_{\max}(0)$ y tal que $N(v_0, g_{\max}, 0) = 2$. Entonces, se verifica que para $\tau \rightarrow \infty$

$$v(\xi, \tau) \rightarrow g_{\max}(\xi)$$

uniformemente sobre compactos.

7.4 Comportamiento de la interfase

En esta sección daremos una prueba de la propiedad de localización para nuestro problema en variables reescaladas. Esta propiedad, traducida a variables (x, t) nos da la velocidad de la frontera libre o interfase; más concretamente, diría que

$$\text{sop } u(\cdot, t) \subset \{x : |x| \leq \xi_0(T - t)^{|\beta|}\}.$$

De donde se deduce de forma inmediata que $E = \{0\}$ (recordemos que E es el conjunto de extinción).

Teorema 7.4.1 *Sea $v_0(\xi)$ una función continua, no negativa, simétrica, decreciente para $\xi > 0$ y de soporte compacto. Entonces existe $0 < \xi_0 < \infty$ tal que, para τ suficientemente grande,*

$$\text{sop } v(\cdot, \tau) \subset (-\xi_0, \xi_0).$$

Demostración. La idea es comparar la función $v(\xi, \tau)$ con la solución del problema

$$(7.4.1) \quad \begin{cases} \phi'' - |\beta|\xi(\phi')^{1/m} + \alpha\phi^{1/m} - \phi^{p/m} = 0 & 0 < \xi < \xi_0 \\ \phi(\xi_0) = \phi'(\xi_0) = 0, \end{cases}$$

el cual sabemos que tiene una única solución positiva a la izquierda de ξ_0 (ver lema 3.1.3) y a la derecha de ξ_0 la prolongamos por cero. Además, al ser el sistema disipativo (estamos disparando hacia atrás) obtenemos que la función ϕ es positiva en $[0, \xi_0)$ y sus puntos críticos están cada vez más cerca del nivel c_* .

En la sección anterior hemos visto que si el dato inicial verifica las hipótesis del teorema, el conjunto ω -límite está formado por los perfiles autosemejantes contruidos en el capítulo 3, con dato inicial $\phi_0 \in A$.

Por otra parte, vimos en el capítulo 3 que el conjunto A es compacto. Además, tenemos dependencia continua del perfil con respecto al dato inicial. Por tanto, el conjunto de puntos de corte de los perfiles con dato inicial en A es acotado. Entonces, podemos definir el punto $\xi_1 < \infty$ como el supremo del conjunto de puntos de corte de los perfiles con dato inicial en A .

Nota. Si existiera una sucesión de perfiles cuyo soporte tendiera a infinito, el perfil límite tendría como soporte toda la recta. Por tanto volviendo a variables (x, t) tendríamos una solución que tiene en todo tiempo a toda la recta como soporte; esto contradice la propiedad de compactificación instantánea del soporte dada por Borelli y Ughi en [BU].

Por otra parte, como $v(\cdot, \tau)$ es decreciente para $\xi > 0$ (ver [Fr]) y los soportes de todas las funciones de su ω -límite están uniformemente acotados, tenemos que existe τ_0 suficientemente grande, tal que para todo $\tau > \tau_0$

$$v(\xi_1, \tau) < \varepsilon.$$

Consideremos ahora las soluciones de (7.4.1) con ξ_0 tan grande como para que $\phi(\xi_1) > 2\varepsilon$. Nótese que dicha solución existe, ya que los puntos críticos se acercan al nivel c_* .

Entonces podemos aplicar el principio del máximo y concluir que

$$v(\xi, \tau) < \phi(\xi) \quad \text{en } [\xi_1, \xi_0] \times [\tau_0, \infty).$$

De donde, por simetría se deduce que, para todo $\tau > \tau_0$,

$$\text{sop } v(\cdot, \tau) \subset (-\xi_0, \xi_0).$$

Con lo que se termina la demostración.

□

Apéndice A

El caso $p \geq 1$

En este apéndice realizaremos un estudio del comportamiento asintótico del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} - u^p \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

en el rango de parámetros $0 < m < 1$ y $p \geq 1$. Al dato inicial $u_0(x)$ le impondremos que sea una función continua, no negativa y de soporte compacto.

En este caso, $p \geq 1$, perdemos la propiedad de extinción en tiempo finito. Por tanto, reemplazamos el estudio cerca del tiempo de extinción por el del comportamiento asintótico para tiempo grande. Este comportamiento depende de la competencia entre el término de difusión y el término de absorción, apareciendo cuatro rangos diferentes:

$$p = 1, \quad 1 < p < m + 2, \quad p = m + 2 \quad \text{y} \quad p > m + 2.$$

Esta misma división ocurre para el caso de difusión lenta, $m > 1$.

Teorema A.0.1 *Para $p = 1$ y t suficientemente grande, la solución se comporta como*

$$u(x, t) = O \left(\exp \left(-\frac{2}{(m+1)t} \right) \right).$$

Demostración. Definamos la función

$$v(x, t) = e^t u(x, t),$$

que satisface la ecuación

$$v_t = e^{(1-m)t} (v^m)_{xx}.$$

Redefiniendo el tiempo como $d\tau = e^{(1-m)t} dt$, obtenemos que $v(x, \tau)$ satisface la ecuación de difusión rápida

$$v_\tau = (v^m)_{xx}.$$

Es un hecho conocido que cuando el tiempo tiende a infinito, $v(x, \tau)$ converge a la solución fundamental de la ecuación de difusión rápida, dada por Zel'dovich y Kompaneets [ZK] y Barenblatt [Bar1] y que tiene la fórmula explícita

$$E(x, \tau; a) = \tau^{-1/(1+m)} \left(\frac{2m(m+1)}{a + (1-m)x^2\tau^{-2/(m+1)}} \right)^{1/(1-m)},$$

donde la constante $a > 0$, depende del dato inicial. Por tanto, cuando τ tiende a infinito el factor de decaimiento para v es

$$v(x, \tau) = O(\tau^{-1/(m+1)}),$$

de donde se concluye el resultado deseado para $u(x, t)$. \square

Nota. El factor de decaimiento en el caso lineal $p = m = 1$ es $u = O(\exp^{-t} t^{-1/2})$.

Los casos $1 < p < m + 2$ y $p > m + 2$ han sido tratados en [PJ1], donde tratan datos más generales. En el caso $1 < p < m + 2$ existe una solución muy singular, es decir, una solución con las siguientes propiedades:

$$W \in C((\mathbb{R} \times [0, T]) \setminus \{0, 0\}),$$

$$W(x, 0) = 0 \quad \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| < r} W(x, t) dx = +\infty \quad \text{para todo } r > 0.$$

Para los detalles de la existencia de dicha solución ver [PJ2], [Le]. Esta solución nos dará el comportamiento asintótico de las soluciones. Más concretamente.

Teorema A.0.2 Para $1 < p < m + 2$ y t tendiendo a infinito, la solución $u(x, t)$ verifica:

$$t^{1/(p-1)} u(x, t) \rightarrow W(xt^{-(p-m)/2(p-1)}, t)$$

uniformemente en los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq at^{(p-m)/2(p-1)}\}$. Por tanto, el factor de decaimiento de $u(x, t)$ es del orden de $t^{-1/(1-p)}$.

En el caso, $p > m + 2$, ocurre un fenómeno de simplificación asintótica, es decir, $u(x, t)$ converge a una solución de la ecuación sin absorción, cf. [PJ1].

Teorema A.0.3 Para $p > m + 2$ y t tendiendo a infinito, la solución $u(x, t)$ verifica que

$$t^{1/(m+1)}|u(x, t) - E_0(x, t)| \rightarrow 0$$

uniformemente en los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq at^{1/(m+1)}\}$, donde la función $E_0(x, t)$ es la solución fundamental de la ecuación de difusión rápida, con masa c_0 dada por

$$c_0 = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u^p dx dt.$$

Nos queda por estudiar el caso crítico, $p = m + 2$. En este caso, $u(x, t)$ converge a una solución de la ecuación de difusión rápida sujeta a una contracción en u y en x , debida al efecto del término de absorción. Ver [GV3], para el caso de difusión lenta, $m > 1$.

Teorema A.0.4 Para $p = m + 2$ y t tendiendo a infinito, se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx \sim C(\log t)^{-1/2}$$

y $u(x, t)$ se comporta como

$$u(x, t) \sim (t \log t)^{-1/(m+1)} F(xt^{-1/(m+1)}(\log t)^{-(1-m)/2(m+1)}, a),$$

donde $F(s; a)$ es el perfil de la solución fundamental de la ecuación de difusión rápida y viene dado por

$$F(s; a) = \left(\frac{2m(m+1)}{a + (1-m)s^2} \right)^{1/(1-m)}.$$

Demostración. Introducimos las variables reescaladas

$$\xi = x(T+t)^{-1/(m+1)} (\log(T+t))^{-(1-m)/2(m+1)}, \quad \tau = \log(T+t).$$

En las nuevas variables la función reescalada

$$g(\xi, \tau) = ((T+t) \log(T+t))^{1/(m+1)} u(x, t)$$

verifica una ecuación de la forma

$$g_\tau = A(g) + \frac{1}{\tau} B(g),$$

en donde el operador $A(g)$ viene dado por

$$A(g) = (g^m)_{\xi\xi} + \frac{1}{m+1}\xi g_{\xi} + \frac{1}{m+1}g,$$

que corresponde a la ecuación de difusión rápida, reescalada sin el término logarítmico. Por otro lado, el operador $B(g)$ viene dado por

$$B(g) = \frac{1}{m+1}g + \frac{1-m}{2(m+1)}\xi g_{\xi} - g^{m+2}$$

y lo interpretaremos como una pequeña perturbación.

El introducir un factor logarítmico en el cambio de escala nos permitirá obtener estimaciones de la solución $g(\xi, \tau)$. Al igual que en el caso $m > 1$, cf. [GP], construimos una subsolución \underline{u} y una supersolución \bar{u} para el problema en las variables originales (x, t) . Dichas sub y supersolución vienen dadas por

$$\underline{u}(x, t; T, a) = \left((T+t) \log(T+t) \right)^{1/(1+m)} F(C\xi; a)$$

donde $C = ((1 + (1-m)/2 \log(T))^{-1}$, $T > 1$ y $a > 2^{(1-m)/(1+m)}$.

$$\bar{u}(x, t; T, a) = \left((T+t) \log(T+t) \right)^{1/(1+m)} F(\xi\phi(t); a)$$

donde $\phi(t) = (b - 1/\log(T+t))^{1/2}$, $T > e^{2/(1-m)}$ y $b > 1 + 2/\log(T)$. Usando estas funciones es fácil ver que existen dos constantes a_- y a_+ tales que

$$F(\xi; a_-) \leq g(\xi, \tau) \leq F(\xi; a_+).$$

Entonces, nos encontramos en condiciones de aplicar el razonamiento dado en [GV3] y obtener el resultado deseado. \square

Bibliografía

- [Bar1] BARENBLATT G. I. 1952 On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium, *Prikl. Mat. Mekh.* 16, 67–78 (en ruso)
- [Bar2] BARENBLATT, G. I. 1996 *Scaling, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- [BE] BATEMAN H., ERDÉLYI E. 1953 *Higher Transcendental Functions*, Vol I, Mc Graw-Hill, New York.
- [Ben] BÉNILAN PH. Unpublished notes.
- [BC] BÉNILAN PH., CRANDALL M. G. 1981 Regularizing effects of homogeneous evolution equations. In *Contributions to Analysis and Geometry*, supplement of Amer. J. Math. (A.N. Clark et al. eds.), Baltimore, 23–29.
- [Be] BERNIS F. 1986 Finite speed of propagation and asymptotic rates some nonlinear higher-order parabolic equations with absorption, *Proceedings Royal Soc. Edinburgh*, 104A, 1–19.
- [Ber] BERTSCH M. 1983 A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term, *Nonlinear Anal.* 7, 117–127.
- [BNP] BERTSCH M., NAMBU T., PELETIER L. A. 1982 Decay of solutions of a degenerate nonlinear diffusion equation, *Nonlinear Anal.* 6, 539–554.
- [BPT] BREZIS H., PELETIER L. A., TERMAN D. 1982 A very singular solution of the heat equation with absorption, *Nonlinear Anal.* 6, 539–554.
- [BU] BORELLI M., UGHI M. 1994 The fast diffusion equation with strong absorption: the instantaneous shrinking phenomenon, *Rendiconti Ist. Mat. Trieste*, 26, 109–140.
- [ChV] CHAVES M., VÁZQUEZ J. L. Free boundary layer formation in nonlinear heat propagation, *Preprint*.

- [ChVW] CHAVES M., VÁZQUEZ J. L., WALIAS M. 1997 Optimal existence and uniqueness in a nonlinear diffusion-absorption equation with critical exponents, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 127 A, 217–242.
- [EK] EVANS L. C., KNERR B. F. 1979 Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities, *Illinois J. Math.* 23, N. 1, 153–166.
- [Fr] FRIEDMAN A. 1969 *Partial differential equation of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [Ga1] GALKTIONOV V. A. 1985 Asymptotic behaviour of unbounded solution of the nonlinear parabolic equation $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta$, *Differentsial'nye Uravneniya*, 21, No. 7 (1985), 1126–1134. English translation: *Differential equations*, 21, 751–758.
- [Ga2] GALKTIONOV V. A. 1995 On asymptotic self-similar behaviour for a quasilinear heat equation: single point blow-up, *SIAM J. Math. Anal.* 26, 675–693.
- [Ga3] GALKTIONOV V. A. 1997 Asymptotic self-similar global blow-up for a quasilinear heat equation, *Diff. Int. Eqns.* 10, 3, 487–497.
- [GP] GALAKTIONOV V. A., POSASHKOV S. A. 1986 Asymptotics of nonlinear heat conduction with absorption under the critical exponent, *preprint No. 71, Keldysh Inst. Appl. Math.*, Acad. Sci. USSR, (en ruso)
- [GSV1] GALAKTIONOV V. A., SHMAREV S. I., VÁZQUEZ J. L. 1997 Regularity of interfaces in diffusion processes under the influence of strong absorption, *preprint*.
- [GSV2] GALAKTIONOV V. A., SHMAREV S. I., VÁZQUEZ J. L. Second-order interface equations for nonlinear diffusion with very strong absorption, *preprint*.
- [GV1] GALAKTIONOV V. A., VÁZQUEZ J. L. 1991 Asymptotic behaviour of nonlinear parabolic equations with critical exponents. A dynamical system approach, *SIAM J. Funct. Anal.* 100, 435–462.
- [GV2] GALAKTIONOV V. A., VÁZQUEZ J. L. 1994 Extinction for a quasilinear heat equation with absorption I. Technique of Intersection Comparison. *Comm. Partial Differ. Equations* 19, 7&8, 1075–1106.

- [GV3] GALAKTIONOV V. A., VÁZQUEZ J. L. 1994 Extinction for a quasi-linear heat equation with absorption II. A dynamical systems approach. *Comm. Partial Differ. Equations* 19, 7&8, 1107–1137.
- [GaVe] GMIRA A., VÉRON L. 1984 Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in \mathbb{R}^n , *J. Differ. Equat.* 53, 319–341.
- [Gi] GILDING B. H. 1976 Hölder continuity of solution of parabolic equations, *J. London Math. Soc.* (2), 13, 103–106.
- [Ha] HARTMAN P. 1982 *Ordinary differential equations*, Birkhäuser
- [HP] HERRERO M. A., PIERRE M. 1985 The Cauchy Problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$, *Transactions of the A.M.S.* 291, 145–158.
- [HV] HERRERO M. A., VÁZQUEZ J. L. 1988 Thermal waves in absorbing media, *J. Diff. Eqns.* 74, 218–233.
- [HVe] HERRERO M. A., VELÁZQUEZ J. L. L. 1992 On the dynamics of a semilinear heat equation with strong absorption, *J. Math. Anal. and Appl.* 170, N. 2, 353–381
- [Ka1] KALASHNIKOV A. S. 1974 On the differential properties of the generalized solutions of equations of unsteady filtration type, *Moscow Univ. Math. Bull.* 29, 48–53.
- [Ka2] KALASHNIKOV A. S. 1987 Some problem on the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic second order equations, *Uspekhi Matem. Nauk.* 42 (1987), 135–176 (en ruso). *Russian Math. Surveys* 42:2, 169–222.
- [KP] KAMIN S., PELETIER L. A. 1989 Large time behaviour of solutions of the porous media equation with absorption, *J. Israel J. Math.* 58, 129–146.
- [KU] KAMIN S., UGHI L. 1987 On the behaviour as $t \rightarrow \infty$ of the solutions of the Cauchy problem for certain nonlinear parabolic equations, *J. Math. Anal. Appl.* 128, 456–469.
- [KV] KAMIN S., VÉRON L. 1988 Existence and uniqueness of the very singular solution of the porous media equation with absorption, *J. D'Analyse Mathématique* 51, 245–258.
- [Ke] KERSNER R. 1980 Degenerate parabolic equations with general nonlinearities, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appl.* 4, 1043–1062.

- [Ki] KING J. R. 1988 Extremely high concentration dopant diffusion in silicon, *IMA J. Appl. Math.* **4**, 163–181.
- [Le] LEONI G. 1996 A very singular solution for the porous media equation $u_t = \Delta(u^m) - u^p$ when $0 < m < 1$, *J. Differ. Equations* **132**, 353–376.
- [Ma] MATANO H. 1982 Nonincrease of the lap number for a one-dimensional semilinear parabolic equation, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA* **29**, 401–440.
- [PJ1] PELETIER L. A., JUNNING Z. 1990 Large time behaviour of solution of the porous media equation with absorption: The fast diffusion case, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appl.* **14**, 107–121.
- [PJ2] PELETIER L. A., JUNNING Z. 1991 Source-type solutions of the porous media equation with absorption: The fast diffusion case, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appl.* **17**, 991–1009.
- [SGKM] SAMARSKII A. A., GALAKTIONOV V. A., KURDYUMOV S. P., MIKHAILOV A. P. 1995 *Blow-up in Problems for Quasilinear Parabolic Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, (Russian: Nauka, Moscow, 1987).
- [Sa] SATTINGER D. H. 1969 On the total variation of solutions of parabolic equations, *Math. Ann.* **183**, 78–92.
- [St] STURM C. 1936 Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *J. de Math.* **1**, 106–186.
- [V] VÁZQUEZ J. L. 1993 Comportamiento asintótico de las ecuaciones parabólicas no lineales, *Proceedings of the Spanish Conference of Applied Mathematics CEDYA, Madrid*.
- [ZK] ZEL'DOVICH YA. B., KOMPANEETS A. S. 1959 Theory of heat transfer with temperature dependent thermal conductivity, *Collection in honour of the 70th birthday of academician A.F. Ioffe, Izdvo. Akad. Nauk. SSSR, Moscow*, 61–72.
- [Ze] ZELENYAK T. I. 1968 Stabilization of solution of boundary value problems for a second-order parabolic equation with one space variable, *Differentsial'nye Uravneniya* **4**, 34–45. *Translated as Diff. Eq.* **4**, 17–22.

Parte II

Soluciones Fuente para la ecuación de los thin-films

Capítulo 1

Introducción

En esta parte de la memoria estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones fuente para la ecuación de los *thin-films*,

$$(1.0.1) \quad h_t + \nabla \cdot (h^n \nabla (\Delta h)) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ y $n > 0$. Por solución fuente entenderemos una solución no negativa que cuando t tiende a 0 satisface que

$$h(\cdot, t) \rightarrow M\delta,$$

donde δ denota la masa de Dirac y M es una constante positiva. La convergencia la entenderemos en el sentido débil estrella de las medidas; más concretamente, la solución fuente verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow M\varphi(0) \text{ cuando } t \rightarrow 0^+$$

para toda función $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Además, le exigiremos que verifique la convergencia puntual

$$h(x, t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0^+$$

para todo $x \neq 0$.

La regularidad que exigiremos a la solución fuente es que la función $h(x, t)$ sea C^1 para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y todo $t > 0$. Esta regularidad C^1 implica que el ángulo de contacto en la frontera libre es nulo. En el apéndice A consideraremos soluciones con una regularidad menor, soluciones continuas y soluciones con discontinuidades tipo salto, las cuales han sido tratadas en el caso $d = 2$ y $n = 3$ por Tanner [Tan], Starov [Sta] y Brenner y Bertozzi [BB].

El estudio de soluciones fuente en el caso unidimensional ha sido tratado en [BPW] por Bernis, Peletier y Williams. El objetivo de esta parte de la

memoria es extender los resultados obtenidos en dimensión uno a cualquier otra dimensión.

Esta ecuación modeliza el movimiento de una gota "delgada" de aceite sobre una superficie plana. Analicemos esto con más detalle: supongamos que tenemos una gota de un fluido muy viscoso sobre una superficie plana. Para fijar notación, tomaremos la dirección y como la dirección perpendicular a la superficie.

Nuestro modelo es un caso límite de la teoría de fluidos newtonianos incompresibles, cuyo movimiento se rige por la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

y por las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \vec{v}_t + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \mu \Delta \vec{v} - \nabla p,$$

donde \vec{v} es el campo de velocidades, p es la presión, ρ la densidad y μ la viscosidad. La primera simplificación que haremos será suponer que la altura de nuestra gota depende sólo de una variable espacial, es decir, $h = h(x, t)$. Al no depender la altura de la gota de la variable z dicha variable no jugará ningún papel. Otra simplificación que haremos será la de suponer que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}.$$

De donde deducimos que p sólo depende de (x, t) y podremos despreciar $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$ frente a $\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}$.

Como la dirección z no juega ningún papel, trabajaremos con un campo de velocidades $\vec{v} = (v_1, v_2)$ al que impondremos que cumpla condiciones en los puntos donde $y = 0$ y donde $y = h(x, t)$. En la dirección x le impondremos condiciones de no deslizamiento, es decir,

$$v_1 = 0 \quad \text{para } y = 0 \text{ y para } y = h;$$

y en la dirección y le impondremos que

$$v_2 = 0 \quad \text{para } y = 0,$$

$$v_2 = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{para } y = h.$$

Por otra parte, debido a la alta viscosidad de la gota, podemos despreciar la derivada material en las ecuaciones de Navier-Stokes y trabajar con las ecuaciones de Stokes

$$\nabla p = \mu \Delta \vec{v}.$$

Pero teniendo en cuenta las condiciones sobre p y las segundas derivadas de v_1 , las ecuaciones de Stokes se escribirán

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}.$$

Integrando en y dos veces y teniendo en cuenta las condiciones de no deslizamiento, obtenemos que

$$v_1 = -\frac{1}{2\mu} y(h-y) \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Por otro lado, integrando la ecuación de continuidad respecto a y entre 0 y $h(x, t)$ y teniendo en cuenta la expresión obtenida para v_1 y las condiciones que verifica v_2 obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

que es la *ecuación de Reynolds* de la teoría de lubricación en el caso particular en que $h = h(x, t)$ depende sólo de una variable espacial, ver [Pan, TK].

Si suponemos que el movimiento de la gota viene dado por la acción de la gravedad, tenemos que $p = gh$ y la ecuación de Reynolds se traduce en la ecuación de los medios porosos

$$h_t = cg (h^3 h_x)_x = \frac{cg}{4} (h^4)_{xx},$$

la cual ha sido muy tratada en la literatura. Hacemos referencia al trabajo de Vázquez [Vaz] para un desarrollo matemático sobre dicha ecuación.

Si suponemos que el movimiento lo provoca la tensión superficial de la gota, tenemos que

$$p = -\sigma K,$$

en donde σ es el coeficiente de tensión superficial y K es la curvatura de la gota. Una hipótesis generalmente aceptada es la de identificar la curvatura con h_{xx} . Por tanto la ecuación de Reynolds se escribe, en este caso,

$$h_t = -\frac{\sigma}{12\mu} (h^3 h_{xxx})_x.$$

La constante $\sigma/12\mu$ la podemos normalizar a 1 mediante un simple cambio de escala, obteniendo así la ecuación (1.0.1) en dimensión uno.

Este modelo presenta problemas cuando la altura de la gota es pequeña. Por ejemplo, Dussan y Davis en [DD] notaron que la condición de no deslizamiento implica que si la gota tiene ángulo de contacto no nulo, la energía de disipación se hace infinita en la línea de contacto. Debido a estos problemas muchos autores introducen condiciones de deslizamiento, lo que reemplaza la función h^3 por la función $C_1 h^3 + C_2 h^p$ con $0 < p < 3$, (normalmente se toma $p = 1$ ó $p = 2$).

La ecuación (1.0.1) aparece en otras muchas situaciones físicas. Por ejemplo, supongamos que tenemos un fluido muy viscoso en una celda de Hele-Shaw, el cual pasa por una estrechez de anchura $2h$. Entonces, el flujo del fluido por dicha estrechez viene dado por la ecuación (1.0.1) con exponente $n = 1$, ver [GPS, CDGKSZ, DGKZ].

Como guías en la literatura física sobre este modelo citemos, sin ánimo de completitud, los trabajos de Bernis [Ber1], Bertozzi [Bz1], Bertozzi *et al* [BBDK], Levich [Lev], Greenspan [Gre] y el *survey* de De Gennes [Gen].

En cuanto a la teoría matemática de la ecuación (1.0.1), ver [BF, BBD, BP, Ber2, Ber3] para el caso unidimensional y [Gru, EG, DGG, BDGG] para dimensiones superiores. La teoría de existencia de soluciones fuente necesita un estudio aparte, debido a que la masa de Dirac es más singular que los datos iniciales considerados en los trabajos antes citados.

En vista de la estructura en forma divergencia de la ecuación (1.0.1) es natural exigir a las soluciones fuente que verifiquen una ley de conservación de masa, es decir, que para todo tiempo se satisfaga la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x, t) dx = M.$$

Una propiedad importante de la ecuación (1.0.1) es la invariancia bajo rotaciones y bajo un cierto grupo de cambios de escala. Esto nos sugiere, ver por ejemplo [BC] o [Bar], que la solución tipo fuente sea una función radial de tipo autosemejante, que en este caso tiene la forma

$$h(x, t) = t^{-\alpha} f(r) \quad r = |x| t^{-\beta},$$

Al imponer que $h(x, t)$ sea una solución de la ecuación (1.0.1), obtenemos que

$$-\alpha t^{-\alpha-1} f(r) - \beta t^{-\alpha-1} r f'(r) + t^{-\alpha n - \alpha - 4\beta} ((f^n)'(\Delta_r f)' + f^n \Delta_r^2 f) = 0.$$

Para quitar la dependencia en tiempo en la ecuación anterior tomamos

$$\alpha + 1 = \alpha(n + 1) + 4\beta.$$

Esta igualdad y la propiedad de conservación de masa nos determinan los exponentes de autosemejanza:

$$\alpha = d\beta \quad \beta = \frac{1}{4 + dn}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la relación entre α y β y que

$$\Delta_r^2 f = \frac{(r^{d-1}(\Delta_r f)')'}{r^{d-1}},$$

obtenemos que

$$\beta df(r) + \beta r f'(r) = (f^n)'(\Delta_r f)' + f^n \frac{(r^{d-1}(\Delta_r f)')'}{r^{d-1}} = \frac{(r^{d-1} f^n (\Delta_r f)')'}{r^{d-1}}.$$

Nótese que r^{d-1} es un factor integrante para el miembro izquierdo de la igualdad. Por tanto, tenemos que el perfil $f(r)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$(r^{d-1} f^n (\Delta_r f)')' = \beta (r^d f)', \quad r > 0.$$

Por otra parte, la función $h(x, t)$ se puede escribir como

$$h(x, t) = \frac{r^d}{|x|^d} f(r).$$

Por tanto, debido a la convergencia puntual exigida a la solución fuente, si $x \neq 0$ y hacemos tender t a cero, obtenemos que cuando r tiende a infinito,

$$r^d f(r) \rightarrow 0.$$

Por último, la conservación de masa, escrita en términos del perfil $f(r)$, nos da la igualdad

$$\omega_d \int_0^\infty r^{d-1} f(r) dr = M,$$

en donde ω_d denota el área de la esfera unidad en \mathbb{R}^d .

Agrupando todas estas propiedades del perfil, tenemos que $f(r)$ es una solución del problema

$$(1.0.2) \quad (r^{d-1} f^n (\Delta_r f)')' = \beta (r^d f)' \quad r > 0,$$

$$(1.0.3) \quad r^d f(r) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty,$$

$$(1.0.4) \quad \omega_d \int_0^\infty r^{d-1} f(r) dr = M.$$

Nótese que para el caso $n = 1$ existe una solución explícita, dada por

$$f(r) = \frac{1}{8(2+d)(4+d)} (a^2 - r^2)_+^2,$$

donde $\omega_d a^{4+d} = Md(2+d)^2(4+d)^2$. En dimensión 1 esta fórmula fue encontrada por Smyth y Hill [SH]. Lamentablemente, para $n \neq 1$ las soluciones que construiremos no tienen una fórmula explícita.

En cuanto a la regularidad de $f(r)$, le exigiremos que verifique las siguientes hipótesis:

(H1) $f(r)$ es una función C^1 para todo $r > 0$ y C^3 donde $f(r) > 0$.

(H2) $f^n(\Delta_r f)'$ tiene una extensión C^1 a todo $(0, \infty)$.

(H3) $f(r)$ es C^1 en $r = 0$. Además $f'(0) = 0$.

El hecho de pedir al perfil autosemejante una regularidad $C^1(\mathbb{R})$ se debe a que, como veremos en el teorema C, no existen soluciones $C^2(\mathbb{R})$. La hipótesis (H2) la imponemos para que la ecuación tenga sentido en los puntos donde $f(r) = 0$. Por último, la hipótesis (H3) es importante para el resultado de unicidad. El hecho de que $f'(0) = 0$ es debido a que buscamos una solución fuente $h(x, t)$ que sea una función $C^1(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ y radialmente simétrica.

Como veremos en el capítulo 2, trabajaremos con una versión integrada de la ecuación del perfil, que tiene la forma

$$f^n(\Delta_r f)' = \beta r f, \quad r > 0,$$

y por tanto

$$(\Delta_r f)' = \beta r f^{1-n} \quad \text{cuando } f > 0.$$

Como mencionamos anteriormente, en esta parte de la memoria extendemos a cualquier dimensión los resultados obtenidos por Bernis, Peletier y Williams, [BPW], en el caso unidimensional. Más concretamente demostraremos los siguientes resultados:

Teorema A Para $n \geq 3$ no existe solución de (1.0.2)-(1.0.3) que verifique las hipótesis (H1)-(H2).

Dedicaremos el capítulo 2 a la demostración de este teorema.

Teorema B Para $0 < n < 3$, existe una única solución no negativa de (1.0.2)-(1.0.4) que satisface (H1)-(H3). Esta solución tiene soporte compacto $[0, a]$ y es estrictamente positiva y decreciente en $0 \leq r < a$.

A partir de estos teoremas se deduce que, bajo las hipótesis (H1)-(H3), existe una única solución fuente no negativa de tipo autosemejante para todo $0 < n < 3$ y que no existe para $n \geq 3$. En el caso $0 < n < 3$, la solución fuente $h(x, t)$ verifica que

$$h(x, t) > 0 \text{ en } |x| < at^\beta \text{ y } h(x, t) = 0 \text{ en } |x| \geq at^\beta.$$

Por tanto, la superficie $|x| = at^\beta$ es la interfase o frontera libre y separa las regiones donde $h > 0$ y donde $h = 0$. En particular, se deduce que la solución fuente tiene velocidad de propagación finita.

En el siguiente teorema estableceremos el comportamiento de $f(r)$ cerca de la frontera libre. Dicho comportamiento es totalmente análogo al caso unidimensional, ver [BPW].

Teorema C Sea $f(r)$ la solución descrita en el teorema B. Existen constantes positivas B_1 , B_2 y B_3 tales que

1. Si $0 < n < 3/2$, entonces

$$f(r) \sim B_1(a - r)^2 \text{ cuando } r \rightarrow a^-.$$

2. Si $n = 3/2$, entonces

$$f(r) \sim B_2(a - r)^2 \left\{ \log \left(\frac{1}{a - r} \right) \right\}^{2/3} \text{ cuando } r \rightarrow a^-.$$

3. Si $3/2 < n < 3$, entonces

$$f(r) \sim B_3(a - r)^{3/n} \text{ cuando } r \rightarrow a^-.$$

Como consecuencia inmediata de este resultado se obtiene la no existencia de una solución fuente con regularidad $C^2(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$. Efectivamente, si suponemos que $h \in C^2(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$, el perfil verificaría cerca de la frontera libre que $f''(a) = 0$ y por tanto

$$f = o((r - a)^2),$$

lo que contradice el teorema C.

Dedicaremos el capítulo 4 a la demostración de los teoremas B y C. Las técnicas utilizadas en estas demostraciones requieren reducir el problema (1.0.2)-(1.0.4) a un problema de contorno en el intervalo $(0, 1)$, enunciar un principio del máximo y construir la función de Green asociada a dicho problema de contorno. A esto dedicaremos el capítulo 3. En particular, en este capítulo demostraremos que la solución fuente tiene soporte compacto $[0, a]$ y que es positiva en $[0, a)$.

En el capítulo 5 estudiaremos el caso crítico $n = 3$ como caso límite entre los rangos de existencia y no existencia. En particular demostraremos el siguiente resultado:

Teorema D *Sea f_n la solución de (1.0.2)-(1.0.4) con exponente n y sea a_n la longitud de su soporte. Entonces se verifica que, cuando n tiende a 3,*

1. $f_n(0) \rightarrow \infty$.

2. $a_n \rightarrow 0$.

3. $h_n(x, t) \rightarrow M\delta(x)$ para todo tiempo $t > 0$.

4. $(a_n)^d h_n(a_n x, t) \rightarrow \frac{d(d+2)M}{2\omega_d} t^{-d\beta} (1 - (|x|t^{-\beta})^2)_+, \quad \beta = \frac{1}{4+3d}.$

Por último mencionar que, en dimensión 1, la solución del problema de Cauchy obtenida por Bernis en [Ber2] tiene el mismo comportamiento asintótico (cuando $t \rightarrow \infty$) que la solución fuente (en el caso $0 < n < 3$), en el sentido de que los soportes de ambas soluciones se expanden con la misma potencia; las normas $L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p \leq \infty$ decaen con la misma potencia y la norma $L^2(\mathbb{R})$ de $u_x(\cdot, t)$ también decae con la misma potencia. Un resultado similar ha sido probado en dimensiones 2 y 3 por Bertsch *et al.* en [BDGG] para el caso $\frac{1}{8} < n < 2$. En particular demuestran que tanto los soportes como la norma $L^2(\mathbb{R}^d)$ de $\nabla u(t)$ tienen el mismo "comportamiento" potencial; en cuanto a las normas $L^p(\mathbb{R}^d)$ aparecen restricciones: para $d = 2$, decaen con la misma potencia si $1 < p < \infty$ y para $d = 3$ si $1 < p < 6$ (para soluciones generales no se conocen estimaciones para el resto de las normas L^p).

Capítulo 2

No existencia: caso $n \geq 3$

En este capítulo demostraremos el Teorema A. De hecho demostraremos un resultado más fuerte. Pero primero veamos qué ocurre al integrar la ecuación (1.0.2).

Lema 2.0.1 *Bajo las hipótesis (H1)-(H2) toda solución no negativa de (1.0.2)-(1.0.3) verifica, para todo $r > 0$, la ecuación*

$$f^n(\Delta_r f)' = \beta r f,$$

y por tanto, para todo $r > 0$ con $f(r) > 0$,

$$(\Delta_r f)' = \beta r f^{1-n}.$$

Demostración. Integrando la ecuación (1.0.2) obtenemos que

$$r^{d-1} f^n(\Delta_r f)' = \beta r^d f + K,$$

con K la constante de integración. Supongamos que $K \neq 0$; entonces de (1.0.3) se deduce que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-1} f^n(\Delta_r f)' = K,$$

lo cual implica que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-1} (\Delta_r f)' = \pm \infty,$$

en donde el signo del límite viene dado por el signo de la constante K . De esta última igualdad se deduce que para r suficientemente grande $(\Delta_r f)'$ tiene el mismo signo que K . Por lo que existe el límite cuando r tiende a infinito de $\Delta_r f$. Si dicho límite es cero, aplicando la regla de l'Hôpital tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-2} \Delta_r f = \pm \infty \quad d \neq 2,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \log(r) \Delta_r f = \pm \infty \quad d = 2,$$

y por tanto

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-1} \Delta_r f = \pm \infty.$$

Nótese que si el límite de $\Delta_r f$ es distinto de cero la última igualdad es evidente. Pero esto nos dice que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r^{d-1} f')' = \pm \infty,$$

lo que implica que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-1} f' = \pm \infty.$$

Y esto contradice que $r^d f \rightarrow 0$, ya que aplicando la regla de l'Hôpital tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{d+1} f' = 0.$$

□

Lema 2.0.2 Sea la función $f(r) \in C^3(a, b)$ verificando que

$$(\Delta_r f)' > 0$$

en el intervalo (a, b) , con $0 \leq a < b \leq \infty$. Entonces existen los límites cuando r tiende a b de las funciones siguientes:

$$\Delta_r f, \quad r^{d-1} f' \quad \text{y} \quad f.$$

Demostración. Como $(\Delta_r f)' > 0$, tenemos que $\Delta_r f$ es monótona, de donde se deduce que existe su límite y que como mucho se anula una vez; por tanto, para r suficientemente cerca de b , $\Delta_r f$ tiene signo constante. Pero como

$$\Delta_r f = \frac{(r^{d-1} f')'}{r^{d-1}},$$

tenemos que para r suficientemente cerca de b , la función $r^{d-1} f'$ es monótona y por tanto existe su límite. Por otro lado, como mucho se anula dos veces en el intervalo (a, b) . Entonces, para r suficientemente cerca de b , f' tiene signo constante. De donde se deduce que cuando r está cerca de b , f es monótona y por tanto existe su límite. □

Teorema 2.0.3 Supongamos que $n \geq 3$ y sea $r_0 > 0$ tal que $f(r_0) > 0$, con $f(r)$ solución de

$$(\Delta_r f)' = \beta r f^{1-n}$$

en un entorno de r_0 . Entonces podemos extender la solución $f(r)$ a toda la semirrecta $[r_0, \infty)$. Además, se verifica que

1. $f(r) > 0$ para todo $r \geq r_0$,
2. $f(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Demostración.

1. Supongamos que existe $b < \infty$ tal que la solución tiene un intervalo maximal de existencia $[r_0, b)$. Como $b < \infty$ y $(\Delta_r f)'$ es positivo, podemos aplicar el lema anterior para asegurar que existen los límites $f(b^-)$ y $f'(b^-)$. Si suponemos que $f(b^-) = C$, los teoremas clásicos de extensión de soluciones nos darían que se puede extender la solución a un intervalo de la forma $(b, b + \delta)$ lo que contradice que el intervalo $[r_0, b)$ sea maximal. Así pues, tenemos que

$$f(b^-) = 0 \quad \text{ó} \quad f(b^-) = \infty.$$

El caso $f(b^-) = \infty$ se puede descartar, ya que entonces la función $(\Delta_r f)'$ sería acotada en $[r_0, b)$, e integrando se llegaría a contradicción.

Supongamos ahora que $f(b^-) = 0$. Esto implica que $-\infty < f'(b^-) \leq 0$; $f'(b^-) \leq 0$ porque la función $f(r) > 0$ cerca de b y $f'(b^-) > -\infty$ porque $(\Delta_r f)' > 0$ cerca de b . Por tanto, $f'(b^-)$ es finito y en un entorno a la izquierda de b se verifica que $f(r) \leq C(b - r)$. Entonces

$$(\Delta_r f)' \geq \frac{C}{(b - r)^{n-1}},$$

de donde, integrando dos veces y usando de nuevo que $(r^{d-1} f')' = r^{d-1} \Delta_r f$, obtenemos que

$$|f'(r)| \geq \begin{cases} \frac{C}{(b - r)^{n-3}} & \text{si } n > 3 \\ C |\log(b - r)| & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

Lo que contradice el que $f'(b^-)$ sea acotada. Esta contradicción demuestra el teorema, excepto el punto 2.

2. Dado que $f > 0$ en $[r_0, \infty)$ obtenemos que

$$(\Delta_r f)' > 0,$$

de donde se deduce del lema anterior que existen los límites cuando $r \rightarrow \infty$ de las funciones $\Delta_r f$, $r^{d-1} f'$ y f .

Supongamos ahora que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = L_0 < \infty.$$

Entonces, de la ecuación que satisface f obtenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\Delta_r f)' = \infty.$$

De donde se deduce que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r f = \infty,$$

lo que implica que, para $r \geq r_1$,

$$(r^{d-1} f')' \geq C r^{d-1}.$$

Integrando esta última desigualdad obtenemos

$$f' \geq \frac{C}{r^{d-1}} + \frac{C}{d} r.$$

Por tanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f'(r) = \infty.$$

Obteniéndose una contradicción con el hecho de que $L_0 < \infty$.

□

Capítulo 3

Sobre un problema de contorno

En este capítulo reduciremos el problema (1.0.2)-(1.0.4) al problema de contorno

$$(3.0.1) \quad \begin{cases} u \in C^3[0, 1) \cap C^1[0, 1], & u > 0 \text{ en } [0, 1), \\ (\Delta_r u)' = ru^{1-n} & \text{en } (0, 1), \\ u'(0) = u(1) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

y estudiaremos algunas de sus propiedades. En particular veremos un principio del máximo y construiremos la función de Green asociada.

Nótese que dicho problema es singular en $r = 0$ y en el caso $n > 1$ también lo es en $r = 1$. A la singularidad en el origen le dedicaremos la primera sección de este capítulo.

3.1 Sobre la singularidad del laplaciano en el origen

Primero recordaremos ciertas propiedades del laplaciano que nos serán de utilidad:

$$1. \quad \Delta_r u = u'' + \frac{d-1}{r} u' = \frac{1}{r^{d-1}} (r^{d-1} u')'.$$

2. Si $u \in C^2$ en $r = 0$ y $u'(0) = 0$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \Delta_r u = d u''(0).$$

$$3. (\Delta_r u)' = u''' + \frac{d-1}{r} u'' - \frac{d-1}{r^2} u'.$$

4. Si $u \in C^3$ en $r = 0$ y $u'(0) = 0$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (\Delta_r u)' = \frac{d+1}{2} u'''(0).$$

En los dos siguientes resultados resolveremos algunas dificultades que nos encontraremos más adelante, relacionadas con la singularidad del laplaciano en el origen.

Lema 3.1.1 Sea δ una constante positiva y supongamos que $u \in C^1[0, \delta] \cap C^3(0, \delta)$, que $u'(0) = 0$ y que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (\Delta_r u)'$$

existe y es finito. Entonces $u \in C^3$ en $r = 0$.

Demostración. Es suficiente demostrar que u'' y u''' tienen límite cuando r tiende a cero, ya que su continuidad viene dada por la regla de l'Hôpital.

La idea es escribir u' en términos del $\Delta_r u$. Definimos las funciones $\psi(r)$ y $\varphi(r)$ como

$$(\Delta_r u)' = \psi(r) \quad \Delta_r u = \varphi(r),$$

y las extendemos por continuidad al punto $r = 0$. Por tanto en $r = 0$ ψ es continua y φ es C^1 ; además, $\psi = \varphi'$.

Por otro lado, al ser $u'(0) = 0$, podemos integrar la igualdad anterior, obteniendo que

$$u'(r) = \frac{1}{r^{d-1}} \int_0^r s^{d-1} \varphi(s) ds.$$

Derivando esta expresión

$$u''(r) = \varphi(r) - \frac{d-1}{r^d} \int_0^r s^{d-1} \varphi(s) ds.$$

Entonces, haciendo tender $r \rightarrow 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} u''(r) = \varphi(0) - (d-1) \frac{\varphi(0)}{d} = \frac{\varphi(0)}{d}$$

Por tanto $u \in C^2[0, \delta]$. Si volvemos a derivar obtenemos que

$$u'''(r) = \psi(r) - (d-1) \frac{\varphi(r)}{r} + \frac{(d-1)d}{r^{d+1}} \int_0^r s^{d-1} \varphi(s) ds.$$

Sumando y restando $(d-1)\frac{\varphi(0)}{r}$ y haciendo tender $r \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} u'''(r) &= \psi(0) - (d-1) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r) - \varphi(0)}{r} \\ &+ (d-1) \left(\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d \int_0^r s^{d-1} \varphi(s) ds - r^d \varphi(0)}{r^{d+1}} \right) \\ &= \psi(0) - (d-1)\psi(0) + \frac{(d-1)d}{d+1} \psi(0) = \frac{2}{d+1} \psi(0).\end{aligned}$$

Por lo tanto $u \in C^3[0, \delta]$ y concluimos la prueba. \square

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \text{Hallar una función } u \in C^3[0, \delta] \\ (\Delta_r u)' = rg(u) & \text{en } r > 0 \\ u(0) = \alpha, u'(0) = 0, u''(0) = \gamma \end{cases}$$

con $\alpha > 0$ y γ números cualesquiera.

Lema 3.1.2 *Supongamos que $g(s)$ es Lipschitz continua en un entorno de $s = \alpha$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que el problema de valor inicial anterior tiene una única solución. Si además $g(s)$ es C^∞ en un entorno de $s = \alpha$, entonces la solución es C^∞ en un entorno de $r = 0$ y $u^{(j)} = 0$ para todo número impar $j \geq 1$.*

Demostración. Integrando la ecuación del problema de valor inicial obtenemos que

$$\Delta_r u = d\gamma + \int_0^r sg(u(s)) ds,$$

lo que implica que

$$(r^{d-1}u')' = d\gamma r^{d-1} + r^{d-1} \int_0^r sg(u(s)) ds.$$

Volviendo a integrar,

$$\begin{aligned}u'(r) &= \gamma r + \frac{1}{r^{d-1}} \int_0^r \int_0^t t^{d-1} sg(u(s)) ds \\ &= \gamma r + \frac{1}{r^{d-1}} \int_0^r (r^d - s^d) sg(u(s)) ds.\end{aligned}$$

Integrando una vez más y calculando las integrales dobles

$$(3.1.2) \quad u(r) = \alpha + \frac{\gamma}{2}r^2 + \int_0^r sH(r,s)g(u(s))ds,$$

con la función $H(r,s)$ dada por

$$H(r,s) = \frac{r^2 - s^2}{2d} - \frac{s^2(r^{d-2} - s^{d-2})}{d(d-2)r^{d-2}} \quad \text{para } d \neq 2,$$

$$H(r,s) = \frac{r^2 - s^2}{4} - \frac{1}{2}s^2 \log\left(\frac{r}{s}\right) \quad \text{para } d = 2.$$

Definimos el conjunto

$$S_\delta = \{v \in C[0, \delta] : v(0) = \alpha \text{ y } \alpha - \eta_0 \leq v \leq \alpha + \eta_0\}.$$

Sea $\eta_0 > 0$ tal que la función g es Lipschitz continua en $(\alpha - \eta_0, \alpha + \eta_0)$. Definimos el siguiente operador integral: $T_v : C[0, \delta] \mapsto C[0, \delta]$

$$T_v(r) = \alpha + \frac{\gamma}{2}r^2 + \int_0^r sH(r,s)g(v(s))ds.$$

Nuestro objetivo es aplicar el teorema del punto fijo de Banach, para lo cual tenemos que ver que existe un δ tal que $T(S_\delta) \subset S_\delta$ y que el operador T es una contracción en S_δ .

1. Derivando $T_v(r)$ obtenemos que

$$T'_v(r) = \gamma r + \int_0^r sH'(r,s)g(v(s))ds$$

(nótese que $H(r,r) = 0$). Como $v(s) \in S_\delta$ tenemos que $g(v(s)) \leq K$, con K independiente de v y de δ . Así pues,

$$|T'_v(r)| \leq \gamma\delta + K \left(\frac{\delta^3}{2d} + \frac{\delta^2}{d(d+2)} \right).$$

Entonces integrando se deduce que

$$\alpha - C(\delta) \leq T_v(r) \leq \alpha + C(\delta),$$

en donde $C(\delta)$ decrece con δ . Por tanto, tomando δ suficientemente pequeño, $T(S_\delta) \subset S_\delta$.

2. Sean v_1 y v_2 dos funciones pertenecientes al conjunto S_δ . Tenemos que

$$|T(v_1) - T(v_2)| \leq \int_0^r s |H(r, s)| |g(v_1(s)) - g(v_2(s))| ds.$$

Ahora bien, la función $g(s)$ es Lipschitz continua en $(\alpha - \eta_0, \alpha + \eta_0)$ y las funciones v_1 y v_2 pertenecen a S_δ ; por tanto $|g(v_1(s)) - g(v_2(s))| \leq C|v_1(s) - v_2(s)|$. Por otro lado, $H(r, s)$ es acotada en el conjunto $\{0 < s < r < \delta\}$. Así que si δ es suficientemente pequeño,

$$|T(v_1) - T(v_2)| < C \sup_{r \in [0, \delta]} |v_1(r) - v_2(r)|,$$

con constante $C < 1$.

Por tanto, podemos aplicar el teorema del punto fijo de Banach para concluir que existe un único punto fijo u del operador integral T_u .

Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{T_u(r) - T_u(0)}{r} = 0 = \lim_{r \rightarrow 0} T'_u(r),$$

y por tanto $T_u \in C^1[0, \delta]$.

Dicho punto fijo es una solución de nuestro problema de valor inicial, ya que es una función $C^1[0, \delta]$, $u'(0) = 0$; y como $u(r) = \alpha > 0$, podemos aplicar el lema anterior para concluir que $u \in C^3[0, \delta]$. Por otro lado, derivando la expresión integral de $u(r)$ obtenemos que

$$u'''(r) = rg(u(r)) - \frac{d-1}{r^{d+1}} \int_0^r s^{d+1} g(u(s)) ds.$$

Aplicando la regla de l'Hôpital se deduce que $u'''(0) = 0$.

Supongamos ahora que $g(s)$ es C^∞ en un entorno de $s = \alpha$. Derivando la expresión de $u'''(r)$ llegamos a que

$$\begin{aligned} u^{(4)}(r) = & g(u(r)) + rg'(u(r))u'(r) - (d-1)g(u(r)) \\ & + \frac{(d-1)(d+1)}{r^{d+2}} \int_0^r s^{d+1} g(u(s)) ds. \end{aligned}$$

Haciendo tender r a cero y aplicando la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{r \rightarrow 0} u^{(4)}(r) = -(d-2)g(\alpha) + \frac{(d-1)(d+1)}{d+2}g(\alpha) = \frac{3}{d+2}g(\alpha).$$

Por tanto $u \in C^4[0, \delta]$. Con esta información y utilizando el desarrollo de Taylor de $g(u(s))$ en el origen, tenemos que

$$\begin{aligned} u^{(4)}(r) &= F(r) + \frac{(d-1)(d+1)}{r^{d+2}} \int_0^r s^{d+1} (g(\alpha) + g'(\alpha)\gamma s^2 + \psi(s)s^4) ds \\ &= \tilde{F}(r) + \frac{(d-1)(d+1)}{r^{d+2}} \int_0^r s^{d+5} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

En donde, si suponemos que $u \in C^a[0, \delta]$ con $a \geq 4$, tenemos que la función $\tilde{F} \in C^{a-1}[0, \delta]$ y la función $\psi \in C^{a-4}[0, \delta]$. Por tanto los términos no integrales no nos van a causar ningún problema al derivar. Por otro lado, los términos integrales que nos aparecen en la derivada j -ésima son de la forma

$$\frac{1}{r^{d+2+j}} \int_0^r s^{d+5} \psi(s) ds.$$

Así que, aplicando la regla de l'Hôpital, el límite cuando r tiende a cero es finito si $d+5 - (d+1+j) \leq 0$, lo que implica que $j \leq 4$.

Podemos entonces deducir que u es C^8 en $r = 0$ y que

$$u^{(8)}(r) = F_1(r) + \frac{C}{r^{d+6}} \int_0^r s^{d+5} \psi(s) ds.$$

La función $F_1 \in C^1[0, \delta]$ y aumenta su regularidad cuando aumenta la regularidad de $u(r)$. Por otro lado, la función $\psi(s) \in C^4[0, \delta]$ por lo que, aplicando su desarrollo de Taylor en $s = 0$ y repitiendo el mismo argumento se concluye que $u \in C^{12}[0, \delta]$. Un argumento de inducción nos permite concluir que $u \in C^\infty[0, \delta]$.

Por otra parte, si en la fórmula integral (3.1.2) para la función $u(r)$ realizamos el cambio de variable $t = s/r$ obtenemos

$$u(r) = \alpha + \frac{\gamma}{2}r^2 + r^4 \int_0^1 tJ(t)g(u(rt)) dt,$$

donde

$$J(t) = \frac{1-t^2}{2d} - \frac{t^2(1-t^{d-2})}{d(d-2)} \quad \text{para } d \neq 2,$$

$$J(t) = \frac{1-t^2}{4} - \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{para } d = 2.$$

Nótese que

$$u^{(j+4)}(0) = \int_0^1 tJ(t) (r^4 g(u(rt)))^{(j+4)}(0) dt.$$

Ahora bien, como $u'(0) = 0$ tenemos que

$$(r^4 g(u(rt)))^{(j+4)}(0) = Cg(u(rt))^{(j)}(0) = Cg'(\alpha)u^{(j)}(0).$$

Por otro lado, sabemos que $u'(0) = u'''(0) = 0$; por tanto aplicando la recurrencia, obtenemos que $u^{(j)}(0) = 0$ para todo número impar j , lo que concluye la prueba. \square

3.2 Reducción a un problema de contorno

Primero veamos algunas propiedades del perfil $f(r)$, solución de (1.0.2)-(1.0.4).

Lema 3.2.1 *Para todo $r_0 \geq 0$, la función $f(r)$ se anula en algún punto del intervalo (r_0, ∞) .*

Demostración. Supongamos que $f(r) > 0$ en un intervalo $[r_0, \infty)$, para algún $r_0 > 0$. Sabemos que en los puntos donde $f > 0$

$$(\Delta_r f)' = \beta r f^{1-n} > 0,$$

y por el lema 2.0.2 los siguientes límites existen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_r f(r) = L_2 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{d-1} f'(r) = L_1.$$

Como $r^d f \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, aplicando la regla de l'Hôpital obtenemos que

$$0 = \lim_{r \rightarrow \infty} r^d f = \frac{-1}{d} \lim_{r \rightarrow \infty} r^{d+1} f'$$

de donde se deduce que $L_1 = 0$. Por otro lado, si suponemos que $L_2 \neq 0$ tenemos que

$$(r^{d-1} f')' \rightarrow \infty,$$

lo que implica que $L_1 = \infty$, obteniéndose una contradicción. Así pues, $L_1 = L_2 = 0$. Por tanto, para $r > r_0$ la función $\Delta_r f$ es creciente y negativa y $r^{d-1} f'(r)$ es decreciente y positiva. De donde se deduce que $f(r)$ es creciente y negativa; lo que contradice el hecho de que la función $f(r)$ sea positiva. \square

Lema 3.2.2 *Sea $r_0 \geq 0$ tal que $f(r_0) = 0$. Entonces $f(r) = 0$ para todo $r \geq r_0$.*

Demostración. Supongamos que existe un primer punto $r_1 > r_0$ en el cual f se anula. Como f es una función C^1 no negativa (en el caso en que $r_0 = 0$ usamos la condición $f'(0) = 0$) tenemos que

$$f(r_1) = f'(r_1) = f(r_0) = f'(r_0) = 0 \quad f > 0 \text{ en } (r_0, r_1).$$

Por otro lado, aplicando el teorema de Rolle, tenemos que $r^{d-1}f'$ se anula en un punto del intervalo (r_0, r_1) y $\Delta_r f$ en dos puntos del intervalo (r_0, r_1) . Pero $\Delta_r f$ es creciente, por tanto idénticamente nulo, lo que implica que $r^{d-1}f'$ es constantemente cero; esto es, f es cero en todo el intervalo $[r_0, r_1]$. \square

De estos dos últimos lemas se puede concluir de forma inmediata el siguiente resultado:

Lema 3.2.3 *La función $f(r)$ tiene soporte compacto $[0, a]$ y $f(r) > 0$ para $r \in [0, a)$.*

Lema 3.2.4 *$f(r)$ es una función $C^3[0, a]$.*

Demostración. Por el lema anterior, $f(r) > 0$ en $0 \leq r < a$; y en estos puntos f verifica la ecuación $(\Delta_r f)' = \beta r f^{1-n}$. Por tanto, para $0 < r < a$ la regularidad C^3 es evidente. El hecho de que f es C^3 en $r = 0$ es consecuencia de ser positiva y del lema 3.1.1. \square

Reuniendo estos resultados y restringiéndonos al soporte de f , ésta es solución del problema:

$$(3.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } a > 0 \text{ y una función } f(r) \text{ tal que} \\ f \in C^3[0, a) \cap C^1[0, a], \quad f > 0 \text{ en } [0, a) \\ (\Delta_r f)' = \beta r f^{1-n} \quad \text{en } (0, a) \\ f'(0) = f(a) = f'(a) = 0 \quad \omega_d \int_0^a r^{d-1} f(r) dr = M. \end{array} \right.$$

Recíprocamente, si una solución de este problema la extendemos por cero en $r > a$, obtenemos una solución de (1.0.2)-(1.0.4).

Proposición 3.2.5 *Sea f una solución de (1.0.2)-(1.0.4) y sea $h(x, t)$ la solución fuente correspondiente al perfil f . Entonces $h(x, t)$ es una función C^∞ en $x = 0$, para todo $t > 0$.*

Demostración. Por la equivalencia entre el problema (1.0.2)-(1.0.4) y el problema (3.2.1) y por el lema 3.1.2 tenemos que el perfil f es C^∞ en $r = 0$ y $f^{(j)}(0) = 0$ para todo número impar j . Esto implica que la función radial $h(x, t)$ es C^∞ en $r = 0$, para todo tiempo $t > 0$. \square

Por otro lado, el problema (3.2.1) es una versión reescalada del problema (3.0.1). Efectivamente, si (f, a) es una solución de (3.2.1), la función

$$u(r) = cf(ar) \quad \text{con} \quad c^n a^4 \beta = 1$$

es una solución de (3.0.1). Recíprocamente, si $u(r)$ es una solución de (3.0.1) y definimos a y c como

$$c^n a^4 \beta = 1 \quad cM = \omega_d a^d \int_0^1 r^{d-1} u(r) dr,$$

entonces

$$f(r) = \frac{1}{c} u\left(\frac{r}{a}\right)$$

es una solución de (3.2.1).

3.3 Principio del máximo. Función de Green

Teorema 3.3.1 (Principio del máximo) Sea $u \in C^3[0, b) \cap C^1[0, b]$ tal que verifica las condiciones de contorno

$$u'(0) = u(b) = u'(b) = 0,$$

con b una constante positiva. Supongamos que u satisface que $(\Delta_r u)' \geq 0$ en $(0, b)$ y que $u \not\equiv 0$. Entonces,

$$\begin{cases} u > 0 & \text{en } [0, b), \\ u' < 0 & \text{en } (0, b), \\ u''(0) < 0 \text{ y } u''(b^-) > 0. \end{cases}$$

Demostración. Al ser $\Delta_r u$ una función no decreciente, existe el límite $\Delta_r u(b^-)$. Supongamos que $\Delta_r u$ tiene signo constante. Esto implicaría que

$r^{d-1}u'$ es monótona; como se anula en 0 y b , tiene que ser idénticamente nula; por tanto, $u \equiv 0$ en $[0, b]$. Esta contradicción demuestra que

$$\Delta_r u(0^+) = du''(0) < 0 \quad \Delta_r u(b^-) = u''(b^-) > 0.$$

Además, como $\Delta_r u$ es no decreciente, tenemos que existen $0 < r_1 \leq r_2 < b$ tales que

$$\Delta_r u \begin{cases} < 0 & \text{en } 0 < r < r_1, \\ = 0 & \text{en } r_1 \leq r \leq r_2, \\ > 0 & \text{en } r_1 < r < b. \end{cases}$$

De esto se deduce que la función $r^{d-1}u'$ es decreciente en $(0, r_1)$, constante en $[r_1, r_2]$ y creciente en $(r_2, b]$. Ahora bien, se anula en 0 y en b . Por tanto, $u' < 0$ en $(0, b)$. Por otro lado, u se anula en b y es decreciente; por tanto es positiva en $[0, b)$. \square

Consideremos la función de Green asociada al problema de contorno (3.0.1). Por comodidad, para la función de Green $G = G(r, t)$ utilizaremos la notación

$$G' = \frac{\partial G}{\partial r} \quad \Delta_r G = G'' + \frac{d-1}{r} G'.$$

Con esta notación la función de Green satisface el problema de contorno

$$\begin{cases} (\Delta_r G)' = \delta(r-t) & 0 < r < 1, \quad 0 < t < 1 \\ G'(0, t) = G(1, t) = G'(1, t) = 0 & 0 < t < 1. \end{cases}$$

Este problema se puede resolver explícitamente y las fórmulas de G y G' vienen dadas por

$$\text{Para } d \neq 2 \quad G(r, t) = \begin{cases} \frac{t^2 - t^d}{2(d-2)} - \frac{1-t^d}{2d} r^2 & \text{si } r \leq t \\ -\frac{t^d}{2(d-2)} + \frac{t^d}{2d} r^2 + \frac{t^d}{d(d-2)} r^{2-d} & \text{si } r \geq t. \end{cases}$$

$$\text{Para } d = 2 \quad G(r, t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} \log t - \frac{1-t^2}{4} r^2 & \text{si } r \leq t \\ -\frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} r^2 - \frac{t^2}{2} \log r & \text{si } r \geq t. \end{cases}$$

$$\text{Para todo } d \geq 1 \quad G'(r, t) = \begin{cases} -\frac{1-t^d}{d} r & \text{si } r \leq t \\ -\frac{t^d r}{d} \left(\frac{1}{r^d} - 1 \right) & \text{si } r \geq t. \end{cases}$$

Lema 3.3.2 *La función de Green verifica las siguientes propiedades:*

1. $G(r, t) > 0$ para todo $0 \leq r < 1$ y $0 < t < 1$.
2. $G'(r, t) < 0$ para todo $r, t \in (0, 1)$.
3. $G(r, t) \leq C(1-t)$ y $|G'(r, t)| \leq C(1-t)$ para todo $r, t \in [0, 1]$.
4. $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{G(t, t)}{(1-t)^2} = \frac{1}{2}$.
5. $\int_r^1 t G(r, t) dt \geq C_1(1-r)^3$ para todo $r \in [0, 1]$.
6. $\int_0^r t G(r, t) dt = \frac{1}{d+2} r^2 G(r, r)$ para todo $r \in [0, 1]$.

Demostración. La propiedad (2) se deduce de la fórmula de G' y (1) es consecuencia de que $G(1, t) = 0$.

Teniendo en cuenta que $1-t^d < C(1-t)$, obtenemos de la fórmula de G' que (3) se verifica para G' y por integración se cumple para G .

Por otro lado, aplicando la regla de L'Hôpital obtenemos (4) y teniendo en cuenta que cuando $r \leq t$, $G(r, t) \geq G(t, t)$ tenemos que

$$\int_r^1 t G(r, t) dt \geq \int_r^1 t G(t, t) dt \geq C \int_r^1 t(1-t)^2 dt \geq C(1-r)^3,$$

lo cual demuestra (5).

Finalmente, por la fórmula de G tenemos que para $t \leq r$, $G(r, t) = t^d h(r)$, y por tanto

$$\int_0^r t G(r, t) dt = h(r) \int_0^r t^{d+1} dt = \frac{r^2}{d+2} G(r, r).$$

□

El problema lineal asociado a la función $G(r, t)$ es

$$\begin{cases} (\Delta_r v)' = \varphi(r) & \text{en } (0, 1) \\ v'(0) = v(1) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

Lema 3.3.3 Sea $\varphi(r) \in C[0, 1]$. Entonces el problema anterior tiene una única solución $C^3[0, 1]$. Además, $v(r)$ verifica que

$$v^{(j)} = \int_0^1 G^{(j)}(r, t) \varphi(t) dt, \quad j = 0, 1, 2.$$

Demostración. Debido a la singularidad del laplaciano radial en $r = 0$ este lema no se deduce inmediatamente de la teoría general. Pero gracias al hecho de que $v'(0) = 0$ podemos “matar” dicha singularidad y seguir una prueba similar a la de la teoría general. Consideremos la función

$$u(r) = \int_0^1 G(r, t) \varphi(t) dt.$$

Nótese que $G(r, t) \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$; por tanto,

$$u'(r) = \int_0^1 G'(r, t) \varphi(t) dt.$$

Por otro lado, si definimos $G_1(r, t) = G(r, t)$ para todo $r \leq t$ y $G_2(r, t) = G(r, t)$ para todo $r \geq t$, tenemos que

$$\begin{aligned} (r^{d-1} u'(r))' &= \left(\int_0^r r^{d-1} G_2'(r, t) \varphi(t) dt + \int_r^1 r^{d-1} G_1'(r, t) \varphi(t) dt \right)' \\ &= r^{d-1} G_2'(r, r) \varphi(r) + \int_0^r (r^{d-1} G_2(r, t))' \varphi(t) dt \\ &\quad + \int_r^1 (r^{d-1} G_1(r, t))' \varphi(t) dt - r^{d-1} G_1'(r, r) \varphi(r) \\ &= \int_0^1 (r^{d-1} G'(r, t))' \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

En donde los términos no integrales se anulan por la continuidad de $G'(r, t)$. Por tanto,

$$\Delta_r u(r) = \frac{(r^{d-1} u')'}{r^{d-1}} = \int_0^1 \Delta_r G(r, t) \varphi(t) dt.$$

Si como antes dividimos la integral en dos partes y derivamos, obtenemos que

$$\begin{aligned} (\Delta_r u)' = & \Delta_r G_2(r, r) \varphi(r) + \int_0^r (\Delta_r G_2)'(r, t) \varphi(t) dt \\ & + \int_r^1 (\Delta_r G_1)'(r, t) \varphi(t) dt - \Delta_r G_1(r, r) \varphi(r). \end{aligned}$$

Ahora bien, por construcción de la función $G(r, t)$ tenemos que $(\Delta_r G_1)' = (\Delta_r G_2)' = 0$ y $(\Delta_r G_2 - \Delta_r G_1)(r, r) = 1$. Así que

$$(\Delta_r u)' = \varphi(r).$$

Además, $u(r)$ verifica las condiciones de contorno, ya que la función $G(r, t)$ las verifica.

Por otro lado, si consideramos dos soluciones v_1 y v_2 y definimos $w = v_1 - v_2$ obtenemos que $w(r)$ es solución del problema de contorno con la función $\varphi(r) \equiv 0$. Entonces, $\Delta_r w$ es constante. Ahora bien, $w'(0) = w'(1) = 0$ y aplicando el teorema de Rolle tenemos que existe un punto $r_0 \in (0, 1)$ tal que $\Delta_r w(r_0) = 0$. Por tanto la función $r^{d-1} w'$ es constante en $(0, 1)$, pero se anula en $r = 1$, con lo cual es idénticamente cero. Lo que implica que $w(r)$ es constante, pero también se anula en $r = 1$. Entonces $w(r) \equiv 0$ y la unicidad queda probada. \square

Capítulo 4

El caso $0 < n < 3$

En este capítulo estudiaremos la existencia, unicidad y comportamiento cerca de la frontera libre del problema (3.0.1). Para este estudio, desempeñará un papel fundamental el principio del máximo y la construcción de la función de Green vistas en el capítulo anterior.

Recordemos el problema (3.0.1)

$$\begin{cases} u \in C^3[0, 1) \cap C^1[0, 1], & u > 0 \text{ en } [0, 1), \\ (\Delta_r u)' = ru^{1-n} & \text{en } (0, 1), \\ u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

4.1 Existencia de soluciones

En esta sección demostraremos la parte de existencia del teorema B. De acuerdo a lo visto en el capítulo 3, la existencia de una solución fuente vendrá dada por la existencia de una solución del problema (3.0.1).

Teorema 4.1.1 *Si $0 < n < 3$, el problema (3.0.1) tiene solución u que verifica que*

$$u^{(j)} = \int_0^1 G^{(j)}(r, t) t u^{1-n}(t) dt, \quad j = 0, 1.$$

Además, se tienen las siguientes estimaciones:

$$u(r) \geq \begin{cases} (C_1 r^2 G(r, r))^{1/n} & \text{si } 0 < n \leq 1, \\ C_2^{1/n} (1-r)^{3/n} & \text{si } 1 < n < 3, \end{cases}$$

$$u(r) \leq C \quad |u'(r)| \leq C.$$

En donde las constantes C_1 y C_2 no dependen del parámetro n .

Para demostrar este resultado, tendremos que plantear unos problemas aproximados, para los cuales demostraremos existencia de soluciones. Conseguiremos estimaciones para estas soluciones que nos permitan pasar al límite y reconoceremos dicho límite como una solución de nuestro problema original.

Los problemas aproximados

Consideremos los problemas aproximados

$$\begin{cases} u \in C^3[0, 1], & u > 0 \text{ en } [0, 1] \\ (\Delta_r u)' = ru^{1-n} \\ u'(0) = u'(1) = 0, & u(1) = 1/k, \end{cases}$$

en donde k denota una constante positiva.

Lema 4.1.2 Para todo $n > 0$ el problema anterior tiene al menos una solución que verifica que

$$u_k(r) = \frac{1}{k} + \int_0^1 G(r, t) t u_k^{(1-n)}(t) dt, \quad u'_k(r) = \int_0^1 G'(r, t) t u_k^{(1-n)}(t) dt.$$

Demostración. Para esta prueba utilizaremos el teorema del punto fijo de Schauder. Consideremos el espacio de las funciones continuas en $[0, 1]$ y sea S el conjunto convexo definido en $C[0, 1]$ como

$$S = \{v \in C[0, 1] : 1/k \leq v \leq K \text{ en } [0, 1]\},$$

donde K es una constante positiva que determinaremos más adelante. Introduciremos un operador no lineal T tal que a cada $v \in C[0, 1]$ le asocia $w = T(v)$ solución del problema

$$\begin{cases} (\Delta_r w)' = rv^{1-n} \\ w'(0) = w'(1) = 0, & w(1) = 1/k. \end{cases}$$

Nótese que este problema es del tipo de los estudiados en el lema 3.3.3 (basta con considerar la función $w_k(r) - 1/k$). Por tanto existe una única

solución que verifica

$$(4.1.1) \quad w_k^{(j)}(r) = \left(\frac{1}{k}\right)^{(j)} + \int_0^1 G^{(j)}(r, t) t v^{1-n}(t) dt \quad j = 0, 1, 2.$$

Lo primero que vamos a ver es que $T(S) \subset S$. El hecho de que $u \geq 1/k$ viene dado por el principio del máximo, visto en el capítulo anterior, aplicado a la función $w_k(r) - 1/k$. Por otro lado, aplicando la fórmula anterior con $j = 0$ y la estimación $G(r, t) \leq C(1 - t)$ conseguida en el capítulo anterior, obtenemos

$$w_k(r) \leq \begin{cases} 1 + Ck^{1-n} & \text{si } n > 1, \\ 1 + CK^{1-n} & \text{si } 0 < n \leq 1. \end{cases}$$

Por tanto, tomando K suficientemente grande, $T(S) \subset S$. Nótese que si nos restringimos al caso $0 < n \leq 1$, podemos elegir K independientemente de k .

Por otro lado, si aplicamos la fórmula (4.1.1) con $j = 0$ se deduce que el operador T es continuo. Si la aplicamos con $j = 1$ y teniendo en cuenta la estimación $|G'(r, t)| \leq C(1 - t)$ llegamos a que

$$|w'_k(r)| \leq \begin{cases} Ck^{1-n} & \text{si } n > 1, \\ CK^{1-n} & \text{si } 0 < n \leq 1. \end{cases}$$

Por tanto T es acotado en el espacio $C^1[0, 1]$, de donde se deduce que es relativamente compacto en $C[0, 1]$.

Entonces podemos utilizar el teorema del punto fijo de Schauder y concluir que el operador T tiene un punto fijo en el conjunto S , es decir, que

$$\exists u_k \in S \text{ tal que } T(u_k) = u_k.$$

Dicho punto fijo es una solución del problema aproximado.

Por otro lado, gracias a las cotas de $G(r, t)$ y $G'(r, t)$ tenemos que

$$G^{(j)}(r, t) t v^{1-n}(t) dt \leq C \quad j = 0, 1.$$

Entonces, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para pasar al límite en (4.1.1), obteniendo las formulas requeridas para u_k y u'_k .

□

Estimaciones

Lema 4.1.3 Sea $0 < n < 3$. Entonces la solución $u_k(r)$ del problema aproximado verifica que

$$u_k(r) \geq \begin{cases} (Cr^2G(r,r))^{1/n} & \text{si } 0 < n \leq 1, \\ C^{1/n}(1-r)^{3/n} & \text{si } 1 < n < 3, \end{cases}$$

$$u_k(r) \leq C \quad |u'_k(r)| \leq C.$$

Demostración. Por el principio del máximo, la función u_k es decreciente. Por tanto, tenemos que para $0 < n \leq 1$,

$$u_k(r) \geq u_k^{1-n}(r) \int_0^r tG(r,t) dt,$$

y para $n > 1$ que

$$u_k(r) \geq u_k^{1-n}(r) \int_r^1 tG(r,t) dt.$$

Aplicando las propiedades de la función de Green dadas en el lema 3.3.2, se obtienen de forma inmediata las cotas inferiores. Nótese que la dependencia en n de las constantes es $C(n) = C^{1/n}$; este hecho nos será de utilidad cuando estudiemos el caso $n = 3$.

Por otro lado, aplicando las propiedades de la función de Green y las cotas inferiores, obtenemos que, para $1 < n < 3$,

$$u_k(r) \leq 1 + C \int_0^1 (1-t)^{1+3(1-n)/n} dt,$$

$$|u'_k(r)| \leq C \int_0^1 (1-t)^{1+3(1-n)/n} dt.$$

Como $n < 3$, tenemos que $1 + 3(1-n)/n > -1$ y las integrales anteriores convergen, obteniéndose las cotas superiores.

Para el caso $0 < n \leq 1$, la cota superior para u_k se deduce del hecho de que en la demostración de existencia de los problemas aproximados podíamos elegir K independiente de k y por tanto $u_k \leq K$. La estimación de la derivada se obtiene de forma inmediata, ya que

$$|u'_k(r)| \leq C \int_0^1 t(1-t)K^{1-n} dt \leq C.$$

□

Paso al límite

Finalmente, pasaremos al límite en los problemas aproximados. Por las estimaciones superiores obtenidas para u_k y u'_k sabemos que existe una subsección $\{u_m\}$ de $\{u_k\}$ tal que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

De las estimaciones inferiores tenemos que $u > 0$ en $[0, 1)$. Entonces,

$$(\Delta_r u_m)' = r u_m^{1-n} \rightarrow r u^{1-n}$$

uniformemente sobre conjuntos compactos de $[0, 1)$. Pero también sabemos que

$$(\Delta_r u_m)' \rightarrow (\Delta_r u)'$$

en el sentido de las distribuciones. Entonces, por la unicidad del límite tenemos que u verifica la ecuación

$$(\Delta_r u)' = r u^{1-n} \quad \text{en } (0, 1).$$

Por otro lado, de las estimaciones de u_m y de las propiedades de la función de Green obtenemos que, para $j = 0, 1$,

$$|t G^{(j)}(r, t) u_m^{1-n}(t)| \leq C(1-t)^{1+3(1-n)/n}.$$

Teniendo en cuenta que $1 + 3(1-n)/n > -1$ y usando el teorema de la convergencia dominada, obtenemos que la función u satisface

$$u^{(j)} = \int_0^1 G^{(j)}(r, t) t u^{1-n}(t) dt \quad j = 0, 1.$$

De donde se deduce que $u(r)$ verifica las condiciones de contorno

$$u'(0) = u(1) = u'(1) = 0,$$

ya que la función $G(r, t)$ las verifica.

Para ver que $u(r)$ verifica las estimaciones requeridas, se sigue el mismo razonamiento que en el caso de u_k .

Reuniendo todas las propiedades de $u(r)$ tenemos demostrado el teorema de existencia 4.1.1 y con ello, la parte de existencia del teorema B.

4.2 Unicidad de soluciones

En esta sección completaremos la demostración del teorema B, dando una prueba de unicidad para el problema (3.0.1), que, como vimos en el capítulo 3, es equivalente a probar la unicidad de la solución fuente.

Teorema 4.2.1 *Si $0 < n \leq 1$, la solución del problema (3.0.1) es única.*

Demostración. Primero reduciremos el problema (3.0.1) al problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } a > 0 \text{ y una función } v(r) \text{ tales que} \\ v \in C^3[0, a) \cap C^1[0, 1], \quad v > 0 \text{ en } [0, a), \\ (\Delta_r v)' = r v^{1-n} \quad \text{en } (0, a), \\ v'(0) = v(a) = v'(a) = 0 \quad v(0) = 1. \end{array} \right.$$

mediante el cambio de escala

$$v(r) = \frac{1}{c} u(r a), \quad \text{con } c = u(0) \text{ y } a = (u(0))^{n/4}.$$

Supongamos que (v_1, a_1) y (v_2, a_2) son dos soluciones distintas. Por la unicidad del problema de valor inicial (ver lema 3.1.2), tenemos que, sin pérdida de generalidad,

$$v_1''(0) > v_2''(0).$$

Definimos la función $w = v_1 - v_2$. Por las condiciones de contorno sabemos que

$$w(0) = w'(0) = 0 \quad w''(0) > 0,$$

y por tanto, w es positiva en un entorno de $r = 0$. Supongamos que existe un primer punto r_1 tal que $w(r_1) = 0$. Por el teorema de Rolle existe $r_2 \in (0, r_1)$ tal que $w'(r_2) = 0$. Entonces, w verifica que para $r \in (0, r_2)$

$$(\Delta_r w)' > 0 \quad w'(0) = w'(r_2) = 0.$$

El hecho de que $(\Delta_r w)' > 0$ se debe a que la función $t \rightarrow t^{1-n}$ es creciente.

Aplicando el principio del máximo a la función $w(r) - w(r_2)$ obtenemos que $w' < 0$ en $(0, r_2)$. Pero la función w se anula en $r = 0$, lo cual contradice que $w > 0$ en $(0, r_2)$. Por tanto, las funciones v_1 y v_2 no se cortan y $a_2 < a_1$.

Por otro lado, $\Delta_r w$ es creciente en $(0, a_2)$ y es positivo en $r = 0$. Esto implica que la función $r^{d-1} w'$ es creciente en $(0, a_2)$. Por tanto, $r^{d-1} w' > 0$ en $(0, a_2)$. Ahora bien, $a_2^{d-1} w'(a_2) = a_2^{d-1} v_1'(a_2)$, que es negativo por el principio del máximo. Esta contradicción concluye la demostración. \square

Teorema 4.2.2 Si $1 \leq n < 3$, la solución del problema (3.0.1) es única.

Demostración. Consideremos dos soluciones, u y v , del problema (3.0.1) y sea $w = u - v$. Entonces, w verifica las condiciones de contorno

$$w'(0) = w(1) = w'(1) = 0.$$

Como la función $t \rightarrow t^{1-n}$ es decreciente, tenemos que

$$r^d w(\Delta_r w)' = r^{d+1}(u^{1-n} - v^{1-n})w \leq 0.$$

Por otro lado, la función $r^d w(\Delta_r w)'$ verifica la igualdad

$$r^d w(\Delta_r w)' = (r^d w \Delta_r w)' - d(r^{d-1} w w')' - \frac{1}{2}(r^d (w')^2)' + \frac{d+2}{2} r^{d-1} (w')^2.$$

Por tanto, la función

$$h(r) = r^d w \Delta_r w - d r^{d-1} w w' - \frac{1}{2} r^d (w')^2$$

es no creciente. Teniendo en cuenta que $\Delta_r w = w'' + \frac{d-1}{r} w'$, podemos reescribir h como

$$h(r) = r^{d-1} \left(r w w'' - w w' - \frac{1}{2} r (w')^2 \right).$$

Nótese que $h(0) = 0$. Como h es no creciente, los siguientes límites existen:

$$\lim_{r \rightarrow 1} h(r) = \lim_{r \rightarrow 1} w(r) w''(r) = L.$$

Si suponemos que $L \neq 0$, tenemos que, para r cerca de 1, $w w'' \geq C$. Por otro lado, se deduce de las condiciones de contorno que $w = o(1-r)$. Reuniendo estas dos desigualdades,

$$w'' \geq \frac{C}{1-r},$$

para r cerca de 1; pero esto contradice la continuidad de w' .

En resumen, la función h es no creciente y se anula en los puntos $r = 0$ y $r = 1$, de donde se deduce que $h(r) \equiv 0$. Entonces

$$h'(r) = r^d w(\Delta_r w)' - \frac{d+2}{2} r^{d-1} (w')^2 \equiv 0.$$

Pero como $r^d w(\Delta_r w)' \leq 0$ se deduce que ambos términos son nulos. Por tanto $w' \equiv 0$. Pero $w(1) = 0$, por lo que $w \equiv 0$, lo cual termina la demostración.

□

4.3 Comportamiento cerca de la frontera libre

En esta sección demostraremos el Teorema C, de acuerdo con la equivalencia de problemas vista en el capítulo 3.

Teorema 4.3.1 *Sea u la solución del problema (3.0.1).*

1. Si $0 < n < 3/2$, entonces $0 < u''(1^-) < \infty$ y

$$u(r) \sim \frac{1}{2}u''(1^-)(1-r)^2 \quad \text{cuando } r \rightarrow 1^-.$$

2. Si $n = 3/2$, entonces

$$u(r) \sim \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} (1-r)^2 \left\{ \log \left(\frac{1}{1-r} \right) \right\}^{2/3} \quad \text{cuando } r \rightarrow 1^-.$$

3. Si $3/2 < n < 3$, entonces

$$u(r) \sim B(1-r)^{3/n} \quad \text{cuando } r \rightarrow 1^-,$$

con la constante dada por

$$B = \left(\frac{n^3}{3(3-n)(2n-3)} \right)^{1/n}.$$

Para esta demostración necesitaremos el siguiente resultado:

Lema 4.3.2 1. Si $0 < n < 3/2$, entonces $u''(1^-)$ es finito.

2. Si $n = 3/2$, entonces $u''(r) = O(|\log(1-r)|)$ cuando $r \rightarrow 1^-$.

3. Si $3/2 < n < 3$, entonces $u^{(j)}(r) = O((1-r)^{3/n-j})$ cuando $r \rightarrow 1^-$, $j = 0, 1, 2$.

Demostración. Para el caso $0 < n \leq 1$ tenemos que

$$(\Delta_r u)' = ru^{1-n} \leq C.$$

Integrando entre $1/2$ y 1 obtenemos que

$$u''(1) = \Delta_r u(1) \leq C.$$

En el caso $n > 1$, las estimaciones para u conseguidas en la sección 4.1 nos dicen que

$$u(r) \geq C(1-r)^{3/n}.$$

Por tanto,

$$(\Delta_r u)' = O((1-r)^{-3+3/n}).$$

Nótese que $-3 + 3/n > -1$ ($= -1$, < -1) si $n < 3/2$ ($= 3/2$, $> 3/2$). Por tanto, por integración, obtenemos el resultado deseado. \square

Demostración del teorema 4.3.1. Para el caso $0 < n < 3/2$, tenemos del lema anterior que $u''(1^-) < \infty$ y por el principio del máximo que $u''(1^-) > 0$. Integrando obtenemos el resultado deseado.

En el caso $3/2 \leq n < 3$ reduciremos el problema (3.0.1) a otro tratado por Taliaferro en [Tal]. Consideremos la función u como variable independiente (esto es posible gracias a que $u' < 0$) y la función $y = (u')^2$ como variable dependiente. En este contexto $r = r(u)$ denota la función inversa de $u(r)$.

Entonces, tenemos que

$$y(u) = (u'(r))^2, \quad u'(r) = -\sqrt{y(u)},$$

$$r \rightarrow 1^- \text{ si } u \rightarrow 0^+; \quad y \rightarrow 0 \text{ si } u \rightarrow 0^+,$$

$$u''(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad u'''(r) = -\frac{1}{2} \sqrt{y(u)} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.$$

De donde $y(u)$ verifica la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \Phi(u)y^{-1/2} = 0,$$

con

$$\Phi(u) = u^{1-n} \left(2r - \frac{d-1}{r} u^{n-1} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{2(d-1)}{r^2} u^{n-1} y^{1/2} \right).$$

Esta función $y(u)$ verifica que

$$y(u) > 0 \text{ en } (0, 1) \quad \text{y que} \quad y(0) = 0.$$

Para poder aplicar los resultados de Taliaferro [Tal] necesitamos conocer cómo se comporta la función $\Phi(u)$ cuando u esta cerca de cero. Analicemos la función Φ : claramente

$$u^{n-1} y^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad u \rightarrow 0^+.$$

Por otro lado, del lema anterior tenemos que

$$u^{n-1}(r)u''(r) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow 1^-,$$

que es equivalente a que

$$u^{n-1} \frac{dy}{du} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad u \rightarrow 0^+.$$

Entonces, $\Phi \sim 2u^{1-n}$. Por tanto, aplicando los resultados de Taliaferro tenemos que

1. Para $n = 3/2$

$$y(u) \sim 3^{2/3} u \left(\log \left(\frac{1}{u} \right) \right)^{2/3} \quad \text{cuando} \quad u \rightarrow 0.$$

2. Para $3/2 < n < 3$

$$y(u) \sim Au^{2(3-n)/3} \quad \text{cuando} \quad u \rightarrow 0,$$

en donde la constante A viene dada por

$$A = \left(\frac{9}{(3-n)(2n-3)} \right)^{2/3}.$$

Para determinar el comportamiento de $u(r)$ cerca de $r = 1$, necesitamos resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(r) = -\sqrt{y(u(r))} & r < 1, \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Dividiendo la ecuación por \sqrt{y} e integrando entre r y 1, obtenemos que

$$\int_0^{u(r)} \frac{ds}{\sqrt{y(s)}} = 1 - r.$$

Nótese que, gracias a cómo se comporta la función $y(u)$ cerca de cero, estas integrales convergen. Sustituyendo dicho comportamiento obtenemos que

1. Si $n = 3/2$

$$\int_0^{u(r)} \frac{ds}{\sqrt{s} (\log(1/s))^{1/3}} \sim 3^{1/3} (1-r).$$

De la regla de l'Hôpital se deduce que

$$\int_0^{u(r)} \frac{ds}{\sqrt{s} (\log(1/s))^{1/3}} \sim 2\sqrt{u} \left(\log \left(\frac{1}{u} \right) \right)^{-1/3} \quad \text{cuando } u \rightarrow 0.$$

Por tanto,

$$u(r) \left(\log \left(\frac{1}{u(r)} \right) \right)^{-2/3} \sim \frac{3^{2/3}}{4} (1-r)^2 \quad \text{cuando } u \rightarrow 0.$$

Estudiemos como se comporta $\log \left(\frac{1}{u} \right)$ cuando $u \rightarrow 0$. De la igualdad anterior se deduce que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \log \left(\frac{u (\log(1/u))^{-2/3}}{K(1-r)^2} \right) = 0,$$

donde $K = \frac{3^{2/3}}{4}$. Esta expresión la podemos reescribir como

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\log(u) + \log \left[\left(\log \left(\frac{1}{u} \right) \right)^{-2/3} \right] - \log(1-r)^2 \right) = \log(K).$$

Sacando factor común $\log(u)$ y teniendo en cuenta que $\log(u) \rightarrow -\infty$ cuando $u \rightarrow 0$, obtenemos que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\log(1-r)^2}{\log(u)} - \frac{2 \log(\log(1/u))}{3 \log(u)} \right) = 0.$$

Por otro lado, cuando $u \rightarrow 0$,

$$-\frac{\log(\log(1/u))}{\log(u)} = \frac{\log(\log(1/u))}{\log(1/u)} \rightarrow 0.$$

De donde se deduce que

$$-\log(u) \sim -\log(1-r)^2.$$

Y entonces $u(r)$ verifica

$$u(r) \sim \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} (1-r)^2 \left(\log \left(\frac{1}{1-r} \right) \right)^{2/3} \quad \text{cuando } r \rightarrow 1.$$

2. Para $3/2 < n < 3$

$$\int_0^{u(r)} \frac{ds}{s^{1-n/3}} \sim \sqrt{A}(1-r).$$

Por otro lado,

$$\int_0^{u(r)} \frac{ds}{s^{1-n/3}} = \frac{3}{n} (u(r))^{n/3}.$$

Por tanto,

$$u(r) \sim \left(\frac{n^3}{3(3-n)(2n-3)} \right)^{1/3} (1-r)^{3/n} \quad \text{cuando } r \rightarrow 1.$$

□

Capítulo 5

El caso crítico: $n = 3$

En este capítulo estudiaremos el límite del problema (3.0.1) cuando $n \rightarrow 3$, como caso límite entre las regiones de existencia y no existencia de soluciones fuente, con el objetivo de dar una prueba al teorema D.

Empezaremos enunciando un resultado que se obtiene de forma trivial (integrando por partes) pero que nos será de gran utilidad.

Lema 5.0.1 Sea $q(t)$ un función $C^3[0, 1) \cap C^1[0, 1]$ tal que

$$q'(0) = q(1) = q'(1) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 1} (1-t) \Delta_r q(t) = 0.$$

Entonces $q(t)$ verifica la igualdad

$$\int_0^1 t^d (1-t^2) (\Delta_r q(t))' dt = 2d(d+2) \int_0^1 t^{d-1} q(t) dt.$$

Lema 5.0.2 Sea u_n la solución del problema (3.0.1) con exponente n . Entonces, cuando n tiende a 3 tenemos que

$$\int_0^1 r^{d-1} u_n(r) dr \rightarrow \infty.$$

Demostración. Supongamos que

$$\int_0^1 r^{d-1} u_n(r) dr \leq C.$$

Debido al comportamiento cerca de la frontera libre, dado en el teorema C, se verifica que

$$(1-r) \Delta_r u_n(r) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow 1.$$

Por tanto, tenemos que la función u_n satisface las condiciones del lema anterior. Entonces,

$$(5.0.1) \quad I_n = \int_0^1 t^d (1-t^2) (\Delta_r u)'(t) dt \leq C.$$

Por otro lado, de la fórmula obtenida para u'_n y de las propiedades de la función de Green, obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} |u'_n(r)| &= \left| \int_0^1 G'(r, t) (\Delta_r u_n)'(t) dt \right| \leq C \int_0^{1/2} (1-t) (\Delta_r u_n)'(t) dt \\ &\quad + C \int_{1/2}^1 (1-t) (\Delta_r u_n)'(t) dt. \end{aligned}$$

De la desigualdad (5.0.1) obtenemos que la segunda integral es acotada; y para la primera integral tenemos que

$$\int_0^{1/2} (1-t) (\Delta_r u_n)'(t) dt = \int_0^{1/2} (1-t) t u_n^{1-n}(t) dt \leq C u_n^{1-n}(1/2),$$

donde la última desigualdad se debe a que u_n es decreciente. Ahora bien, por las estimaciones obtenidas para u_n sabemos que si $n > 1$,

$$u_n(r) \geq C^{1/n} (1-r)^{3/n}.$$

Así que la primera integral también es acotada.

Una vez demostrado que $|u'_n|$ es acotada, podemos integrar entre r y 1, obteniendo que

$$u_n \leq C(1-r).$$

Pero entonces

$$I_n \geq \int_0^1 \frac{t^{d+1}(1+t)}{C^{n-1}(1-t)^{n-2}} dt \rightarrow \infty$$

cuando $n \rightarrow 3$, lo que contradice que I_n sea acotada. \square

Definamos la renormalización de la solución fuente $h_n(x, t)$

$$H_n(x, t) = a_n^d h_n(a_n x, t).$$

Nótese que

$$\int_{\mathbb{R}^d} H_n(x, t) dx = a_n^d \int_{\mathbb{R}^d} h_n(a_n x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} H_n(y, t) dy = M.$$

Escrita esta renormalización en términos de la función u_n ,

$$H_n(x, t) = \frac{a_n^d}{c_n} t^{-d\beta_n} u_n(r).$$

Las constantes a_n y c_n verifican las relaciones

$$c_n a_n^4 \beta_n = 1, \quad c_n M = \omega_d a_n^d \int_0^1 r^{d-1} u_n(r) dr.$$

Definamos la función

$$F_n(r) = \frac{a_n^d}{c_n} u_n(r).$$

Nótese que $\text{sop}(F_n) = [0, 1]$ y que, gracias a la conservación de masa, $F_n(r)$ verifica la igualdad

$$M = t^{-d\beta_n} \int_{\mathbb{R}^d} F_n(r) dx = \omega_d \int_0^1 r^{d-1} F_n(r) dr.$$

De las relaciones que verifican a_n y c_n tenemos que

$$F_n(r) = \frac{u_n(r)}{Q_n} \quad Q_n = \frac{\omega_d \int_0^1 s^{d-1} u_n(s) ds}{M}.$$

Nótese que $Q_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow 3$. Por otro lado, para $j = 0, 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} |F_n^{(j)}(r)| &= \frac{1}{Q_n} \left| \int_0^1 G^{(j)}(r, t) (\Delta_r u_n)'(t) dt \right| \\ &\leq \frac{C}{Q_n} \left(\int_0^{1/2} (1-t) (\Delta_r u_n)'(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{1/2}^1 (1-t) (\Delta_r u_n)'(t) dt \right). \end{aligned}$$

Para la última desigualdad hemos utilizado las estimaciones obtenidas para la función de Green y su derivada. En la demostración del lema 5.0.2 vimos que la primera integral es acotada. Para tratar la segunda integral, usaremos

el hecho de que u_n verifica las condiciones del lema 5.0.1 y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 (1-t)(\Delta_r u_n)'(t) dt &\leq \frac{2^{d+1}}{3} \int_{1/2}^1 t^d (1-t^2)(\Delta_r u_n)'(t) dt \\ &\leq \frac{2^{d+1}}{3} \int_0^1 t^d (1-t^2)(\Delta_r u_n)'(t) dt \\ &= \frac{2^{d+2} d(d+2)}{3} \int_0^1 t^{d-1} u_n(t) dt. \end{aligned}$$

De donde se deduce que tanto $F_n(r)$ como $F_n'(r)$ están acotadas independientemente de n . Por tanto, el teorema de Ascoli-Arcela nos garantiza la existencia de una sucesión tal que

$$F_n(r) \rightarrow F(r) \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

En donde $F \geq 0$ y $F' \leq 0$ en $[0, 1]$. Además, esta función $F(r)$ verifica el siguiente resultado:

Lema 5.0.3

$$\begin{cases} (\Delta_r F)' = 0 & \text{en } (0, 1) \\ F(r) > 0 & \text{en } (0, 1) \\ F(1) = 0 & \omega_d \int_0^1 r^{d-1} F(r) dr = M. \end{cases}$$

Por tanto,

$$F(r) = \frac{d(d+2)M}{2\omega_d} (1-r^2)_+.$$

Demostración. De la convergencia uniforme de F_n en $[0, 1]$ tenemos que $F(1) = 0$, que

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_d \int_0^1 r^{d-1} F_n(r) dr = \omega_d \int_0^1 r^{d-1} F(r) dr$$

y que

$$(\Delta_r F_n)' \rightarrow (\Delta_r F)'$$

en el sentido de las distribuciones. Pero

$$(\Delta_r F_n)' = \frac{(\Delta_r u_n)'}{Q_n} \geq 0.$$

Por tanto la distribución $(\Delta_r F)'$ es no negativa; es decir, es una medida (posiblemente no acotada). Pero en dimensión uno, la primitiva de una medida es una función de variación acotada. En nuestro caso, $\Delta_r F$ será una función de variación acotada en cada compacto de $(0, 1)$. Entonces $(r^{d-1} F')' = r^{d-1} \Delta_r F$ es también una función de variación acotada y por tanto su primitiva es una función continua. Así pues, la función $F \in C^1(0, 1)$.

Supongamos que existe un primer punto $b \in (0, 1)$ tal que $F(b) = 0$. Como $F' \in C^1(0, 1)$ y $F' \leq 0$ tenemos que $F > 0$ en $[0, b)$ y $F'(b) = 0$. Nótese que $b > 0$, si no contradecimos que $\int_0^1 r^{d-1} F(r) dr = M$.

De la convergencia uniforme de F_n y de la positividad de F en $[0, b)$ se deduce que

$$(\Delta_r F_n)' = \frac{r F_n^{1-n}}{Q_n} \rightarrow 0$$

uniformemente sobre conjuntos compactos de $[0, b)$. Por otro lado, teníamos que

$$(\Delta_r F_n)' \rightarrow (\Delta_r F)'$$

en el sentido de las distribuciones. Entonces, por la unicidad del límite tenemos que

$$(\Delta_r F)' = 0 \quad \text{en } (0, b).$$

De donde se deduce que

$$F(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \psi(r),$$

con $\psi(r) = r^{2-d}$ si $d > 2$ y $\psi(r) = \log(r)$ si $d = 2$. Para determinar las constantes, observemos que

1. La función $F(r)$ es acotada, por tanto $C_3 = 0$.
2. $F'(b) = 0$ implica que $C_2 = 0$.
3. $F(b) = 0$ implica que $C_1 = 0$.

Por tanto la función $F(r)$ es positiva en todo el intervalo $[0, 1)$. Repitiendo el proceso realizado en $[0, b)$ en el intervalo $[0, 1)$, tenemos que

$$F(r) = C_1(1 - r^2)_+.$$

Por último, la función $F(r)$ satisface $\omega_d \int_0^1 r^{d-1} F(r) dr = M$; por tanto,

$$C_1 = \frac{d(d+2)M}{2\omega_d}.$$

□

Demostración del teorema D. Nótese que al escribir $H_n(x, t)$ en función de F_n obtenemos que

$$H_n(x, t) = t^{-d\beta_n} F_n(r),$$

y por el último lema, haciendo tender n a 3 tenemos que

$$H_n(x, t) \rightarrow t^{-d\beta_3} \frac{d(d+2)M}{2\omega_d} \left(1 - \frac{|x|^2}{t^{2\beta_3}}\right)_+.$$

Por otro lado el perfil autosemejante $f_n(r)$ verifica la ley de conservación de masa

$$\omega_d \int_0^{a_n} r^{d-1} f_n(r) dr = M,$$

que, reescrita en términos de u_n nos dice que

$$\omega_d \beta^{1/n} a_n^{d+4/n} \int_0^1 r^{d-1} u_n(r) dr = M.$$

Aplicando el lema 5.0.2 se deduce que

$$a_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow 3.$$

Por otro lado, sabemos que el perfil $f_n(r)$ es no creciente. Por tanto, de la ley de conservación de la masa obtenemos que

$$M \leq \frac{\omega_d}{d} f_n(0) a_n^d,$$

de donde se deduce que

$$f_n(0) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow 3.$$

Si escribimos los resultados obtenidos para f_n en términos de la solución fuente $h_n(x, t)$ obtenemos que para cada tiempo t fijo

$$h_n(0, t) = t^{-d\beta} f_n(0) \rightarrow \infty.$$

$$\text{sop}(h_n(x, t)) = \{|x| \leq a_n t^\beta\} \rightarrow \{0\}.$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_n(x, t) dx = M.$$

De donde se deduce que la función fuente converge a una delta de Dirac, ya que para toda función $\varphi(x) \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x, t) \varphi(x) dx - M\varphi(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x, t) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \\ &\leq \int_{|x| \leq a_n t^\beta} h_n(x, t) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \end{aligned}$$

Entonces para n suficientemente próximo a 3, tenemos que $|x| \leq \varepsilon_1$ y como la función $\varphi(r)$ es continua, $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon_2$. Por tanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x, t) \varphi(x) dx - M\varphi(0) \right| \leq M\varepsilon_2.$$

Entonces, para cada tiempo $t > 0$

$$h_n(x, t) \rightarrow M\delta(x).$$

Lo que concluye con la demostración del Teorema D. □

Apéndice A

Soluciones menos regulares

En la literatura referente a los *thin films* también se consideran soluciones con ángulo de contacto en la frontera libre no nulo. Evidentemente estas soluciones no son C^1 , pero sí continuas. Uno de los objetivos de este apéndice es ver cuándo existen este tipo de soluciones que tengan la forma autosemejante

$$h(x, t) = t^{-d\beta} f(r) \quad r = |x|t^{-b} \quad \beta = \frac{1}{4 + dn}.$$

En este caso, la función reescalada

$$u(r) = cf(ar) \quad c^n a^4 \beta = 1$$

satisface el problema de contorno

$$\begin{cases} (\Delta_r u)' = ru^{1-n} & \text{en } (0, 1) \\ u'(0) = u(1) = 0 \quad u'(1) = -\theta. \end{cases}$$

Teorema A.0.1 *Existe una única solución fuente con ángulo de contacto no nulo si y sólo si $0 < n < 3$. Además, en el caso $0 < n < 3$ el ángulo de contacto ha de ser finito, $\theta < \infty$.*

Demostración. El hecho de que el ángulo de contacto tenga que ser finito se deduce del hecho de que $u(r)$ es positiva. Ya que al ser positiva

$$\Delta_r u(r) > \Delta_r u(r_0) \quad \text{en } (r_0, 1).$$

E integrando llegamos a que

$$r^{d-1} u' \geq r_0^{d-1} u'(r_0) + \frac{\Delta_r u(r_0)}{d} (r^d - r_0^d),$$

lo que implica que $u'(1) > -\infty$.

Una vez visto que $u'(1)$ es finita, tenemos que, cerca de 1^- , u satisface que

$$u \sim \theta(1-r).$$

Por tanto,

$$(\Delta_r u)' \sim \theta(1-r)^{1-n},$$

y mediante integración llegamos a que

$$(r^{d-1}u')' \sim C(1-r)^{2-n}.$$

Entonces, si $n \geq 3$, $u'(1) = -\infty$. Por tanto, no existe solución para $n \geq 3$.

Para el caso $0 < n < 3$, siguiendo el mismo razonamiento que en el capítulo 4 podemos construir las soluciones

$$u(x) = \frac{\theta}{2}(1-r^2) + \int_0^1 G(r,t) t u^{1-n}(t) dt,$$

en donde $G(r,t)$ es la función de Green definida en el capítulo 3.

La unicidad de dichas soluciones se demuestra igual que la unicidad en el caso de ángulo de contacto cero. \square

Otro tipo de soluciones tratadas en la literatura son las soluciones con discontinuidades tipo salto. Recordemos los problemas aproximados utilizados para la prueba de existencia dada en el capítulo 4,

$$\begin{cases} (\Delta_r u)' = ru^{1-n} & \text{en } (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 & u(1) = 1/k. \end{cases}$$

Para cada $k > 0$ este problema tiene una única solución $u_k(r)$, para todo $n > 0$. La existencia de $u_k(r)$ la vimos en el capítulo 4 y la unicidad se obtiene igual que en el caso en que la solución se anule en $r = 1$.

Si extendemos la solución $u_k(r)$ por cero para todo $r > 1$, obtenemos para todo $n > 0$ la solución fuente dada por

$$h_k(x,t) = \frac{t^{-d\beta}}{c} u_k\left(\frac{r}{a}\right),$$

en donde las constantes c y a satisfacen

$$c^n a^4 \beta = 1 \quad cM = \omega_d a^d \int_0^1 s^{d-1} u_k(s) ds.$$

Evidentemente, dicha solución fuente es discontinua en la frontera libre. En el caso $d = 2$ y $n = 3$ estas soluciones fuente coinciden con las encontradas por Tanner [Tan] y por Starov [Sta].

Bibliografía

- [Bar] BARENBLATT, G. I. 1996 *Scaling, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- [Btt] BERETTA, E. 1997 Self similar source solution of a fourth order degenerate parabolic equation. *Nonlinear Anal.* **29**, 741–760.
- [BBD] BERETTA, E., BERTSCH, M. & DAL PASSO, R. 1995 Nonnegative solutions of a fourth order nonlinear degenerate parabolic equation. *Arch. Rational Mech. Anal.* **129**, 175–200.
- [Ber1] BERNIS, F. 1995 Viscous flows, fourth order nonlinear degenerate parabolic equations and singular elliptic problems. In *Free Boundary Problems: Theory and Applications*. (J. I. Díaz, M. A. Herrero, A. Liñán & J. L. Vázquez, eds.). Pitman Research Notes in Mathematics, **323**, pp. 40–56. Longman, Harlow.
- [Ber2] BERNIS, F. 1996 Finite speed of propagation and continuity of the interface for thin viscous flows. *Adv. Differential Equations* **1**, 337–368.
- [Ber3] BERNIS, F. 1996 Finite speed of propagation for thin viscous flows when $2 \leq n < 3$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322**, 1169–1174.
- [BF] BERNIS, F. & FRIEDMAN, A. 1990 Higher order nonlinear degenerate parabolic equations. *J. Differential Equations* **83**, 179–206.
- [BPW] BERNIS, F., PELETIER, L. A. & WILLIAMS, S. M. 1992 Source type solutions of a fourth order nonlinear degenerate parabolic equation. *Nonlinear Anal.* **18**, 217–234.
- [Bz1] BERTOZZI, A. L. 1996 Symmetric singularity formation in lubrication-type equations for interface motion. *SIAM J. Applied Math.* **56**, 681–714.
- [BBDK] BERTOZZI, A. L., BRENNER, M. P., DUPONT, T. F. & KADANOFF, L. P. 1994 Singularities and similarities in interface flows. In

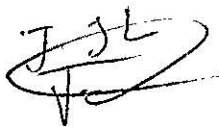
Trends and Perspectives in Applied Mathematics (L. Sirovich, ed.). Applied Mathematical Sciences, 100, pp. 155–208. Berlin. Springer-Verlag.

- [BP] BERTOZZI, A. L. & PUGH, M. 1996 The lubrication approximation for thin viscous films: regularity and long time behavior of weak solutions. *Comm. Pure Appl. Math.* 49, 85–123.
- [BDGG] BERTSCH, M., DAL PASSO, R., GARCKE, H. & GRÜN, G. 1997 The thin viscous flow equation in higher space dimensions. SFB256 Preprint No. 486, University of Bonn, 1996. *Adv. Differential Equations*, to appear.
- [BC] BLUMAN, G. W. & COLE, J. D. 1974 *Similarity Methods for Differential Equations*. New York. Springer-Verlag.
- [BB] BRENNER, M. P. & BERTOZZI, A. L. 1993 Spreading of droplets on a solid surface. *Phys. Rev. Lett.* 71, 593–596.
- [CDGKSZ] CONSTANTIN, P., DUPONT, T. F., GOLDSTEIN, R. E., KADANOFF, L. P., SHELLEY, M. J. & SU-MIN ZHOU. 1993 Droplet breakup in a model of the Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. E* 47, 4169–4181.
- [DGG] DAL PASSO, R., GARCKE, H. & GRÜN, G. 1997 On a fourth order degenerate parabolic equation: global entropy estimates, existence and qualitative behaviour of solutions. SFB256 Preprint No. 467, University of Bonn, 1996. *SIAM J. Math. Anal.*, 29, 321–342.
- [DGKZ] DUPONT, T. F., GOLDSTEIN, R. E., KADANOFF, L. P. & SU-MIN ZHOU. 1993 Finite-time singularity formation in Hele-Shaw systems. *Phys. Rev. E* 47, 4182–4196.
- [DD] DUSSAN V., E. B. & DAVIS, S. H. 1974 On the motion of a fluid–fluid interface along a solid surface. *J. Fluid Mech.* 65, 71–95.
- [EG] ELLIOTT C. M. & GARCKE, H. 1996 On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility. *SIAM J. Math. Anal.* 27, 404–423.
- [Gen] DE GENNES, P. G. 1985 Wetting: statics and dynamics. *Rev. Modern Phys.* 57, 827–863.
- [GPS] GOLDSTEIN, R. E., PESCI, A. I. & SHELLEY, M. J. 1993 Topology transitions and singularities in viscous flows. *Physical Rev. Letters* 70, 3043–3046.

- [Gre] GREENSPAN, H. P. 1978 On the motion of a small viscous droplet that wets a surface. *J. Fluid Mech.* **84**, 125–143.
- [Gru] GRÜN, G. 1995 Degenerate parabolic differential equations of fourth order and a plasticity model with nonlocal hardening. *Z. Anal. Anwendungen* **14**, 541–574.
- [Lev] LEVICH, V. G. 1962 *Physicochemical Hydrodynamics*. Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall.
- [Pan] R. L. PANTON 1984 *Incompressible flow*. Wiley, New York.
- [SH] SMYTH N. F. & HILL, J. M. 1988 High-order nonlinear diffusion. *IMA J. Appl. Math.* **40**, 73–86.
- [Sta] STAROV, V. M. 1983 Spreading of droplets of nonvolatile liquids over a flat solid surface. English translation: *Colloid J. USSR (USA)* **45**, no. 6 (1983), 1009–1015. Russian original: *Kolloidn. Zh.* **45**, no. 6 (1983), 1154–1161.
- [Tal] TALIAFERRO, S. D. 1979 A nonlinear singular boundary value problem. *Nonlinear Anal.* **3**, 897–904.
- [Tan] TANNER, L. H. 1979 The spreading of silicone oil drops on horizontal surfaces. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **12**, 1473–1484.
- [TK] A. B. TAYLER AND J. R. KING 1990 Free boundaries in semiconductor fabrication. In *free boundary problems: theory and applications* Vol. I, Pitman Research Notes in Mathematics 185, Longman, Harlow, pp 243–259.
- [Vaz] J. L. VÁQUEZ 1992 An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation. *Shape optimization and free boundaries (Montreal 1990)*. M. C. Delfour ed. *Math and Phys. Sciences. Series C. Vol. 380*. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. Boston. Leiden: 1002, pp 347–389.

Sobresaliente una laude por unanimidad
16 diciembre 1998



J. R. King

